马来西亚华文独中教科书

数学

初二下册



董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

马来西亚华文独中教科书

数学

初二下册



董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

《数学》初二下册

行政编辑：黄宝玉
设计与排版：蔡思盛

© 郑重声明，此书版权归出版单位所有，未经允许，书上所有内容不得通过任何形式进行复制、转发、储存于检索系统，或翻译成其它语言的活动。

© Dong Zong
Hak cipta terpelihara. Mana-mana bahan atau bahagian dalam buku ini tidak dibenarkan diterbitkan semula, disimpan dalam cara yang boleh dipergunakan lagi, atau ditukar kepada apa-apa bentuk atau apa-apa cara, baik dengan elektronik, mekanikal, fotokopi, rakaman, pengalihan bahasa dan sebagainya tanpa mendapat kebenaran secara menulis daripada pihak penerbit terlebih dahulu.

© Dong Zong
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, translated in any other languages, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Swan Printing Sdn Bhd.

版次：
2017年8月第1版

印次：
2020年10月第4次印刷

编审团队

编 写 者：刘建华　张丽萍　张锦发　林艾嘉

林汶良　洪燕芬　萧子良

学科顾问：刘建华　陈庆地　张丽萍

编审委员：陈玉丽　李鸿聪　张锦发　林汶良

姚和兴　萧子良　黎启春

责任编辑：张锦发

（按姓氏笔画顺序排列）

鸣 谢

本书承蒙编审小组、林美湘、洪燕芬、林艾嘉等提供建设性意见，并协助编写及审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启

2017年8月

编辑说明

一、这套《初中数学》是根据董教总华文独中工委会统一课程委员会所拟定的数学课程标准编写而成。在拟订课程标准的过程中，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要及各国的课程标准和教材，并采用了旧版统一课本《初中数学》的课程内容。

二、这套《初中数学》沿用旧版《初中数学》的综合方式编写，全套教材共分六册，分三年使用。每册的内容是依据各年级每学年上课三十二周，每周上课六节，每节四十分钟的时间分配而编写，惟各校可按个别情况斟酌处理。

三、这套教材共有38章，内容包括算术、代数、几何、集合论及统计学。其内容除了衔接小学的课程之外，也作为日后跨上高中的基础教材。

四、本书是初二下册，供初中二年级下半年使用，内容包括：
代数——一元二次方程式与一元二次函数、分式、公式、不等式
集合论—— 集合论、集合论的应用
几何——圆及扇形、毕氏定理。

五、本书设有“学习目标”，“注意”，“补充资料”，“思考题”及“随堂练习”栏目，目的在于使学生掌握学习的重点，厘清注意项目，启发思考能力，更增进学习的效果。

六、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。习题的答案都附于书末。此外，本书附有中英名词对照，供学习参考。

七、本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总华文独中工委会统一课程委员会
《初中数学》编审小组
2017年8月

目录

7 圆与扇形

7.1 圆 2

7.2 弧长与扇形面积 15

8 毕式定理

8.1 毕氏定理 32

8.2 毕氏定理的逆定理 48

8.3 距离公式 51

9 集合论

9.1 集合与元素 60

9.2 有限集与基数 68

9.3 集合间的关系及运算 71

9.4 泛集与余集 91

10 集合论的应用

10.1 两个集合联集的基数公式及其应用 100

10.2 余集的基数公式及其应用 108

10.3 三个集合联集的基数公式及其应用 114

目录

11 一元二次方程式与一元二次函数

11.1 一元二次方程式的解法 128
11.2 应用问题 140
11.3 一元二次函数的图像 142

12 分式

12.1 分式的概念与基本性质 150
12.2 分式的四则运算 157
12.3 繁分式 167
12.4 分式方程式 170
12.5 应用问题 176

13 公式

13.1 公式 182
13.2 公式主项的更换 184

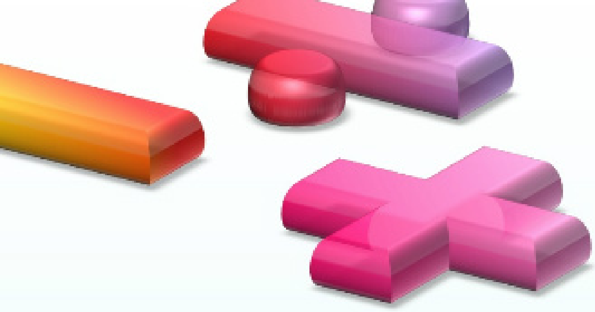
目录

14 不等式

14.1	不等式的基本性质	194
14.2	一元一次不等式	199
14.3	一元一次不等式组	204
14.4	应用问题	210

名词对照 215

答案 218



7 圆与扇形

学习目标

- 能计算圆形及扇形的周长与面积



7.1 圆

圆

在日常生活中，我们经常会看到圆形的物体，例如：图7-1所示的车轮、硬币、盘子、钟面等。



图 7-1

在第4章，我们已经学过，将圆规的针固定在一点 O，如图 7-2(a) 所示，并把圆规旋转 360°，所得的图形就是一个圆 (图7-2(b))。圆上各点与 O 的距离是固定的，称为圆的半径，以字母 r 表示。由圆心到圆上任一点的线段也通称为半径，而通过圆心且两端在圆上的线段则称为直径，其长度以字母 d 表示。如图 7-3 所示的圆，OA 是它的一条半径，BC 是它的一条直径。

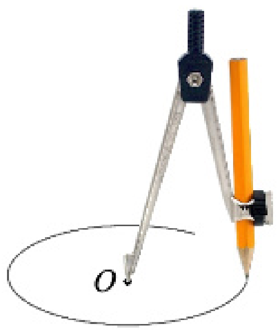


图 7-2(a)

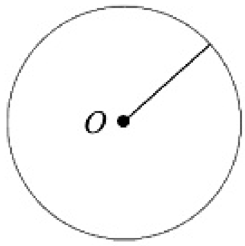


图 7-2(b)

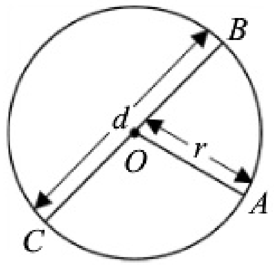


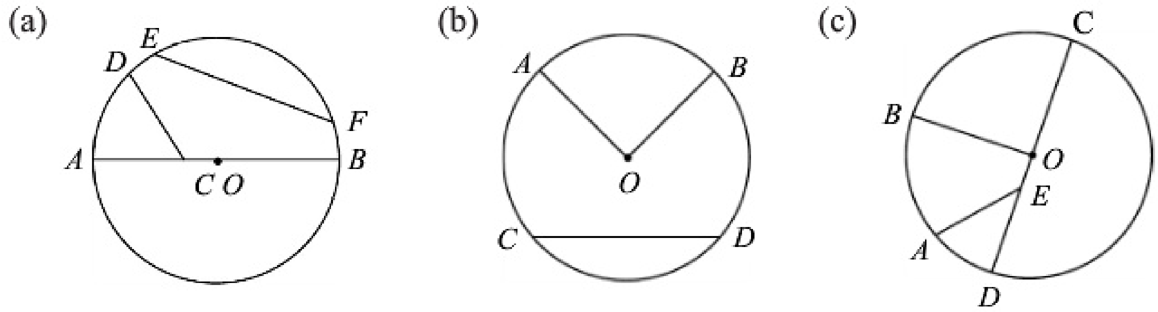
图 7-3

根据圆的定义可知，在一个圆中，所有的半径都等长，所有的直径也都等长，且直径的长是半径的两倍，即

$$d = 2r \quad 或 \quad r = \frac{d}{2}$$

随堂练习 1

1. 作一半径为 3 cm 的圆。
2. 作一直径为 7 cm 的圆。
3. 若一圆的半径为 4 cm，求其直径。
4. 若一圆的直径为 5 cm，求其半径。
5. 在下列各圆中，O 是圆心。指出哪些线段是半径？哪些线段是直径？



圆的周长

我们要怎样测量一个圆的周长呢? 先来动手做以下的实验:

1. 在一硬纸卡上分别作直径为 4 cm，5 cm，6 cm 及 7cm 的圆，在各圆上做一记号作为起点，如图 7-4(a)所示，然后将这些圆剪下来。
2. 取一长尺，将直径为 4 cm 的圆上的记号对准长尺上的刻度0，然后开始沿长尺将圆转动一圈，直至记号又回到长尺的边缘上，如图 7-4(b)所示，此时长尺上对应记号的刻度便是圆的周长。
3. 对直径为 5 cm，6 cm 及 7cm 的圆重复步骤 2，并将结果记录在表1。
4. 计算每一个圆的周长与直径的比值至三位有效数字，并将结果填在表1。

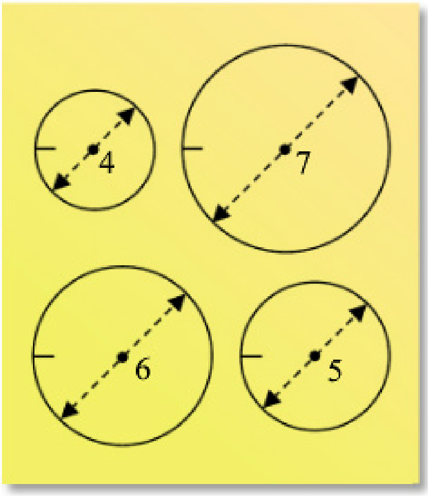


图 7-4(a)

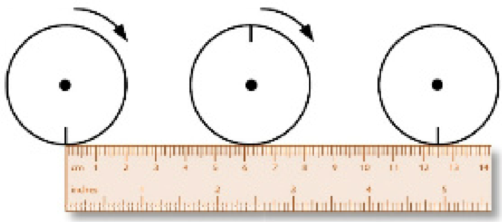


图 7-4(b)

圆的直径	圆的周长	$\dfrac{\text{圆的周长}}{\text{直径}}$
4 cm		
5 cm		
6 cm		
7 cm		

表1

由这个实验可以观察到，圆周长与直径长度的比是一个固定的数，这个数称为圆周率，以π表示，读作‘pie’。按照这个定义，我们有

$$\frac{\text{圆的周长}}{\text{直径}} = \pi$$

$$\text{圆的周长} = \pi \times \text{直径}$$

$$= 2\pi \times \text{半径}$$

若以C表示圆的周长，则

$$\text{圆的周长}\ C = 2\pi r \ \text{或}\ C = \pi d$$

π是个无理数，介于3.1415926与3.1415927之间，在计算时，我们常以3.14或$\frac{22}{7}$作为π的近似值。

例题 1

求半径为7 cm的圆的周长（取$\pi = \frac{22}{7}$）。

解： 周长 $= 2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$$

$$= 44 \text{ cm}$$

补充资料

祖冲之（429年~500年）是南北朝时代著名的数学家及天文学家。他是历史上第一位算出圆周率是介于3.1415926与3.1415927之间的人，一直到一千多年后才有人算出更精确的数值。这是中国古代一个伟大的数学成就。

例题 2

已知一圆的周长为62.8 cm，求其直径(取 $\pi=3.14$)。

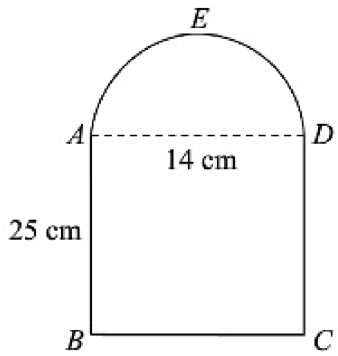
解：

$$C=\pi d$$
$$62.8=3.14\times d$$
$$d=\frac{62.8}{3.14}$$
$$=20\text{ cm}$$

∴ 圆的直径为20 cm。

例题 3

右图中，*AED*是半圆，*ABCD*是长方形，求此图形的周长，答案以π表示。



解： 半圆 *AED* 的长 $=\frac{1}{2}\pi d$

$$=\frac{1}{2}\times\pi\times14$$
$$=7\pi\text{ cm}$$

图形的周长 = 半圆 *AED* 的长 + *AB* + *BC* + *CD*

$$=7\pi+25+14+25$$
$$=(64+7\pi)\text{ cm}$$

随堂练习 2

1. 已知一圆的直径为 8 cm，求其周长 (取 $\pi = 3.14$)。

2. 若一圆的周长为 33 cm，求其半径 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)。

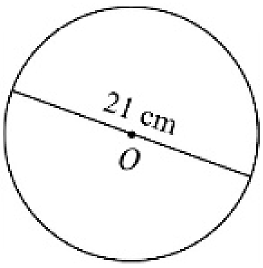
练习 7.1a

1. 完成下表 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)：

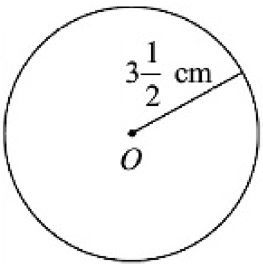
	半径	直径	圆的周长
(a)	7 m		
(b)	5.6 m		
(c)		280 mm	
(d)		126 cm	
(e)			176 mm
(f)			92.4 cm

2. 求下列各圆的周长，其中 O 为圆心 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)：

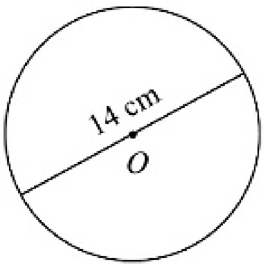
(a)



(b)



(c)



3. 若一圆的半径为 35cm，求其周长 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)。

4. 若一圆的半径为 5mm，求其周长 (取 $\pi = 3.14$)。

5. 若一圆的直径为 49 cm，求其周长 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。

6. 若一圆的直径为 20 mm，求其周长，答案以 π 表示。

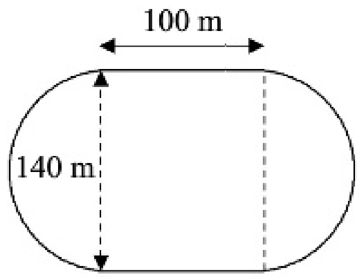
7. 已知一车轮的直径是 63 cm，求其周长 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。

8. 已知一圆的周长是 157 cm，求其半径 (取 $\pi=3.14$)。

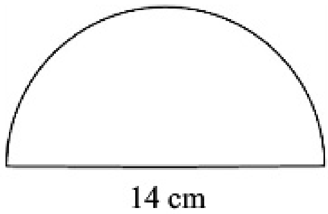
9. 小光要在他家屋外的土地上用一长 99 cm 的铁丝网围出一块圆形的土地来作为花圃，求所围出花圃的直径 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。

10. 文华骑脚车行了 2.2 km，若脚车的车轮半径是 28 cm，问车轮转动了几圈 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)?

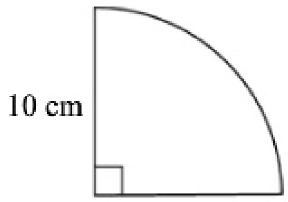
11. 右图所示的草场是由一个长方形及两个半圆形所构成，草场的外缘是一条狭窄的跑道，求此跑道的长 (取 $\pi=3.14$)。



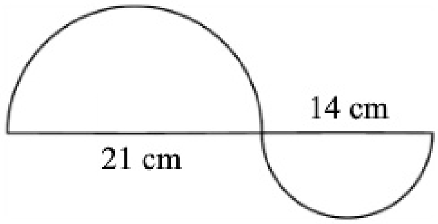
12. 右图所示为一直径等于 14 cm 的半圆，求此图形的周长 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。



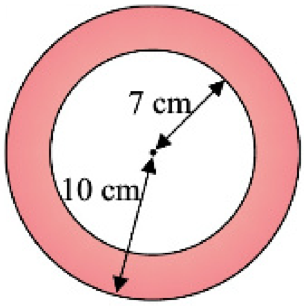
13. 右图所示为一半径等于 10 cm 的四分之一圆，求此图形的周长 (取 $\pi=3.14$)。



14. 右图是由两个半径分别为 21 cm 及 14 cm 的半圆所构成之图形，求其周长 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。



15. 右图中的着色部分是由半径分别为 7 cm 及 10 cm 的两个同心圆所围成，求着色部分的周长，答案以π表示。



圆的面积

怎样计算圆的面积呢?

如图7-5(a)所示，在硬纸上画一圆，将圆剪下来，分成若干等份，并分别剪开(图7-5(b))，然后照图7-5(c)的样子拼起来。

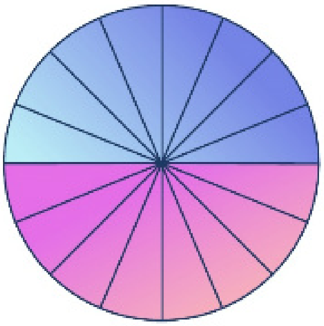


图7-5(a)

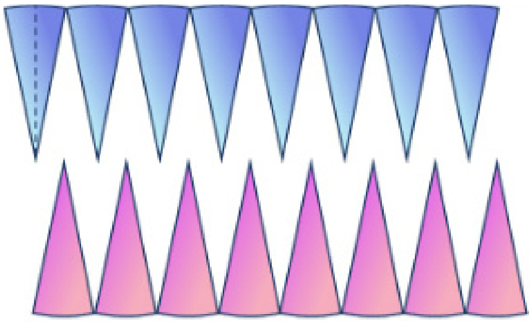


图7-5(b)

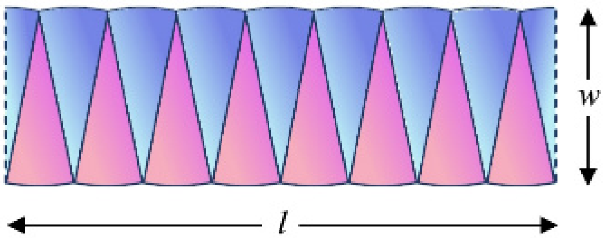


图7-5(c)

如图7-5(c)所示，所拼出来的图形可以近似的看成是一个长方形。若将圆分成越多相等的份数，则所拼得的图形就越接近于长方形。长方形的长 l 非常接近于半圆的周长 πr，而它的宽 w 非常接近于圆的半径 r。因此，圆的面积为

$$\pi r \times r = \pi r^2$$

若以 A 表示圆的面积，则

圆的面积 $A = \pi r^2$

例题 4

求一半径为14 cm的圆的面积（取 $\pi = \frac{22}{7}$）。

解：

$$\begin{aligned} \text{面积} &= \pi r^2 \\ &= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \\ &= 616\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

例题 5

已知一圆的面积为 $154\ \text{cm}^2$，求其直径（取 $\pi = \frac{22}{7}$）。

解：

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ 154 &= \frac{22}{7} \times r^2 \\ r^2 &= \frac{7 \times 154}{22} \\ &= 7 \times 7 \\ r &= 7 \end{aligned}$$

(续) $\therefore$ 圆的直径 $= 2\times 7$

$= 14\text{ cm}$

例题 6

已知一圆的面积为 $256\pi\text{ cm}^2$，求其周长，答案以 π 表示。

解：

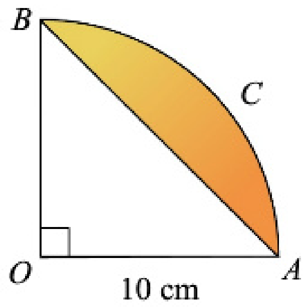
$$A = \pi r^2$$
$$256\pi = \pi r^2$$
$$r^2 = 256$$
$$= 16^2$$
$$\therefore\ r = 16$$

$\therefore$ 圆的周长 $= 2\pi r$

$= 32\pi\text{ cm}$

例题 7

右图中，$OACB$ 是四分之一圆。求弓形 ACB 的面积（取 $\pi = 3.14$）。



解： 四分之一圆 $OACB$ 的面积 $= \frac{1}{4}\pi r^2$

$= \frac{1}{4}\times 3.14\times 10^2$

$= 78.5\text{ cm}^2$

ΔOAB 的面积 $= \frac{1}{2}\times 10\times 10$

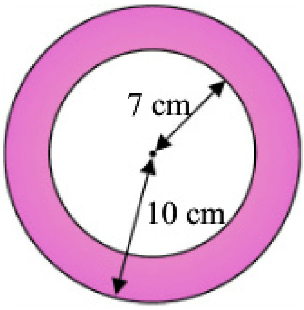
$= 50\text{ cm}^2$

$\therefore$ 弓形 ACB 的面积 $= 78.5 - 50$

$= 28.5\text{ cm}^2$

例题 8

右图中的着色部分是由半径分别为7 cm及10 cm的两个同心圆所围成，求着色部分的面积，答案以π表示。



解： 着色部分的面积＝大圆的面积－小圆的面积

$= \pi \times 10^2 - \pi \times 7^2$

$= 51\pi \text{ cm}^2$

随堂练习 3

1. 求直径为21 cm的圆的面积(取$\pi = \dfrac{22}{7}$)。
2. 已知一圆的周长为125.6 cm，求其面积(取$\pi = 3.14$)。

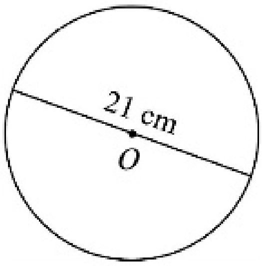
练习 7.1b

1. 完成下表(取$\pi = \dfrac{22}{7}$)：

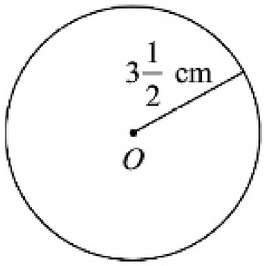
	半径	直径	圆的面积
(a)	7 m		
(b)	5.6 m		
(c)		280 mm	
(d)		4.2 m	
(e)			346.5 cm^2
(f)			$314\frac{2}{7} \text{ mm}^2$

2. 求下列各圆的面积，其中 O 为圆心 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)：

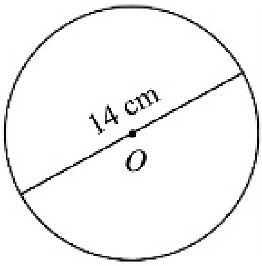
(a)



(b)



(c)



3. 已知一圆的半径为 4 cm，求其面积，答案以 π 表示。

4. 已知一圆的直径为 $17\frac{1}{2}$ cm，求其面积 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。

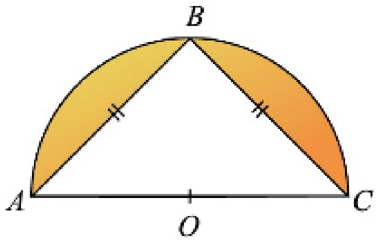
5. 已知一圆的面积为 $36\pi\ \text{cm}^2$，求其半径。

6. 已知一圆的面积为 $121\pi\ \text{cm}^2$，求其直径。

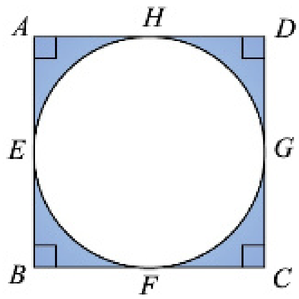
7. 已知一圆的面积为 $38\frac{1}{2}\ \text{mm}^2$，求其周长 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。

8. 已知一圆的周长为 66 cm，求其面积 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。

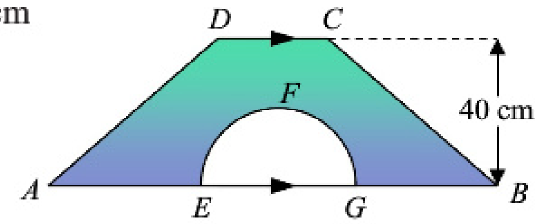
9. 右图中，$OABC$ 是一半圆，ΔABC 是等腰三角形。若 $AC=20$ cm，求着色部分的面积 (取 $\pi=3.14$)。



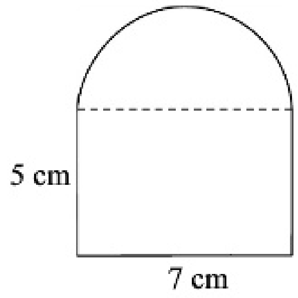
10. 右图中，$ABCD$ 是一边长为 40 cm 的正方形，$EFGH$ 是圆形，E、F、G、H 四点在正方形上。求着色部分的面积 (取 $\pi=3.14$)。



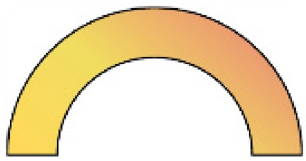
11. 右图中，$ABCD$ 是梯形，EFG 是一直径为 42 cm 的半圆形，$AE=BG=40$ cm，$CD=30$ cm，求着色部分的面积 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。



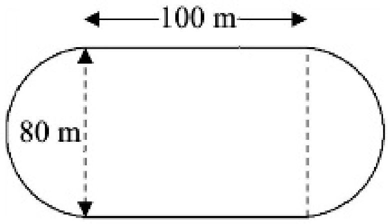
12. 右图所示为一仓库的截面，其上方是半圆形，下方是长方形。求其截面的面积(取$\pi=\frac{22}{7}$)。



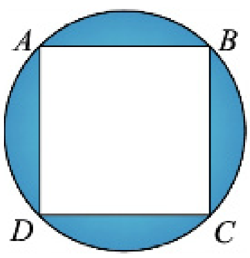
13. 右图所示为一半圆环形铁片，其外半径为8.5 cm，内半径为5.5 cm。求此铁片的面积(取$\pi=\frac{22}{7}$)。



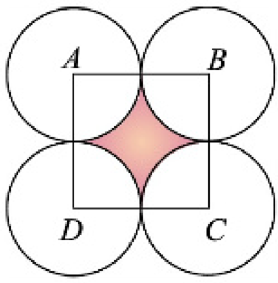
14. 右图所示的运动场是由两个半圆形及一个长方形所组成，求此运动场的面积(取$\pi=3.14$)。



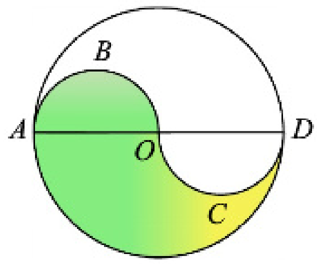
15. 右图中，A、B、C、D四点在一直径为20 cm的圆上，$ABCD$是正方形。求着色部分的面积(取$\pi=3.14$)。



16. 右图中，A、B、C、D是半径为5 cm的四个圆的圆心，求着色部分的面积(取$\pi=3.14$)。



17. 右图中，O为以AD为直径的大圆的圆心，ABO及DCO为分别以OA及OD为直径的半圆，$OA=28$ cm。求着色部分的周长与面积(取$\pi=\frac{22}{7}$)。



7.2 弧长与扇形面积

在图7-6中，O是圆心，A、B是圆周上的两点，圆周上曲线AB之间的部分称为该圆的弧，记作弧AB或$\overset{\frown}{AB}$。又过弧的两端点的半径所形成的角称为圆心角。在图7-6中，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角为$\angle 1$。

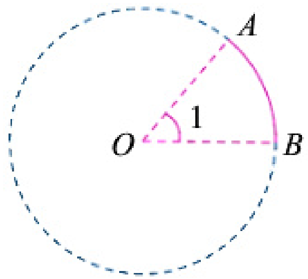


图7-6

事实上，圆周上的两点A、B将圆周分成两段弧，小于半圆的弧称为劣弧，如图7-7中的$\overset{\frown}{AB}$；大于半圆的弧称为优弧，通常以三个字母表示，如图7-7中的$\overset{\frown}{ACB}$。$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{ACB}$所对的圆心角分别为劣角$\angle 1$及优角$\angle 2$。

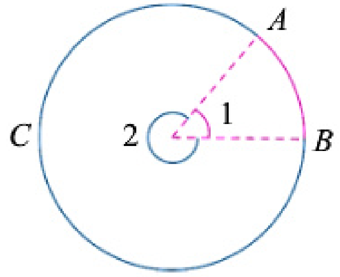


图7-7

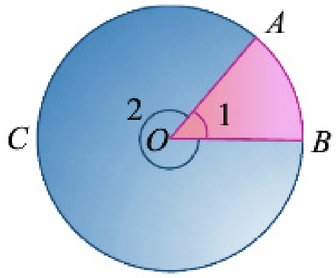


图7-8

如图7-8所示，由组成一个圆心角的两条半径及圆心角所对应的弧所围成的区域叫做扇形。由劣弧所围成的叫做劣扇形，如图7-8中的扇形OAB；由优弧所围成的叫做优扇形，如图7-8中的扇形$OACB$。

弧长

如图7-9所示，$OACB$ 是一个半圆，

$$\therefore \quad \frac{\overset{\frown}{ACB}}{2\pi r}=\frac{1}{2}$$

我们注意到，$\overset{\frown}{ACB}$ 所对的圆心角是180°，它是周角360°的$\frac{1}{2}$。

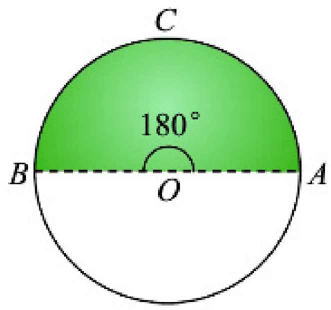


图7-9

如图7-10所示，OAB 是四分之一圆，

$$\therefore \quad \frac{\overset{\frown}{AB}}{2\pi r}=\frac{1}{4}$$

我们注意到，$\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角是90°，它是周角360°的$\frac{1}{4}$。

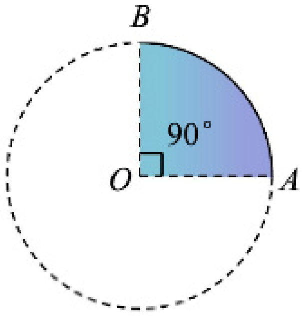


图7-10

由以上的例子可观察到，圆上的一段弧的长与它所对的圆心角成正比。一个圆周所对的圆心角是360°，因此，

$$\frac{\text{弧长}}{\text{圆周长}}=\frac{\text{圆心角}}{360°}$$

若圆的半径为r，弧长为l，弧所对的圆心角为θ，如图7-11所示，则

$$\frac{l}{2\pi r}=\frac{\theta}{360°}$$

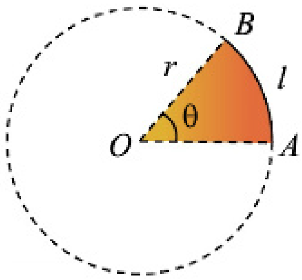


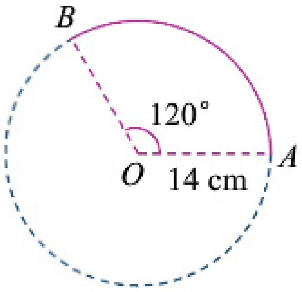
图7-11

即

$$\text{弧长 } l=\frac{\theta}{360°}\times 2\pi r$$

例题 1

右图中，O为圆心，求$\overset{\frown}{AB}$的长(取$\pi=\frac{22}{7}$)。

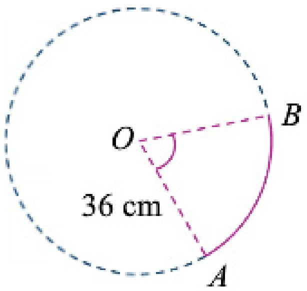


解：

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{AB}&=\frac{120^\circ}{360^\circ}\times2\pi\times14\\&=\frac{1}{3}\times2\times\frac{22}{7}\times14\\&=\frac{88}{3}\\&=29\frac{1}{3}\text{ cm}\end{aligned}$$

例题 2

右图中，O为圆心。已知$OA=36$ cm，$\overset{\frown}{AB}=14\pi$ cm，求$\angle AOB$。

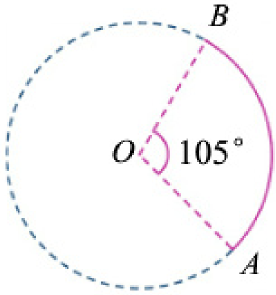


解： 设$\angle AOB=\theta$。

$$\begin{aligned}\overset{\frown}{AB}&=\frac{\theta}{360^\circ}\times2\pi\times36\\14\pi&=\frac{\theta}{360^\circ}\times2\pi\times36\\\theta&=\frac{14\pi\times360^\circ}{2\pi\times36}\\&=70^\circ\end{aligned}$$

例题 3

右图中，O为圆心。已知$\angle AOB = 105°$，$\overset{\frown}{AB} = 55\text{ cm}$，求圆的半径(取$\pi = \frac{22}{7}$)。



解： $\overset{\frown}{AB} = \frac{105°}{360°} \times 2\pi r$

$$55 = \frac{105°}{360°} \times 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

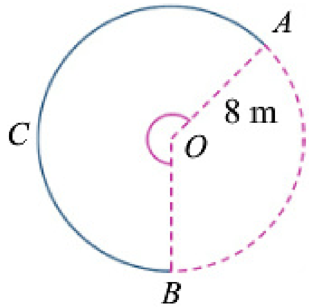
$$r = \frac{360 \times 55 \times 7}{105 \times 2 \times 22}$$

$$= 30\text{ cm}$$

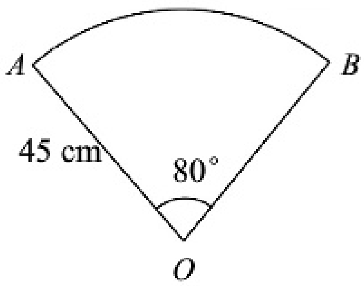
$\therefore$ 圆的半径$= 30\text{ cm}$

随堂练习 4

1. 右图中，O为圆心。已知$OA = 8\text{ m}$，优弧$\overset{\frown}{ACB} = 10\pi\text{ m}$，求优角$\angle AOB$。



2. 如右图所示，OAB是一扇形，$OA = 45\text{cm}$，$\angle AOB = 80°$。求此扇形的周长(取$\pi = 3.14$)。



扇形的面积

与弧长类似，一个扇形的面积与它所夹的圆心角成正比，即，

$$\frac{\text{扇形面积}}{\text{圆的面积}}=\frac{\text{圆心角}}{360^\circ}$$

若圆的半径为r，扇形面积为S，扇形所夹的圆心角为θ，如图7-12所示，则

$$\frac{S}{\pi r^2}=\frac{\theta}{360^\circ}$$

即

$$\text{扇形面积 } S=\frac{\theta}{360^\circ}\times\pi r^2$$

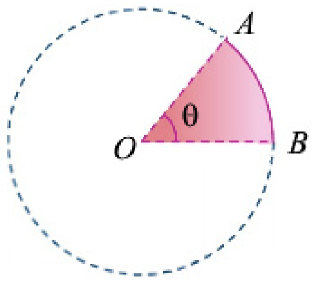
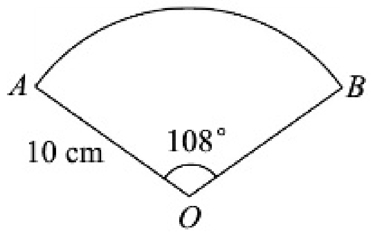


图7-12

例题 4

右图中，OAB是一扇形，$OA=10\text{ cm}$，$\angle AOB=108^\circ$。求此扇形的面积(取$\pi=3.14$)。



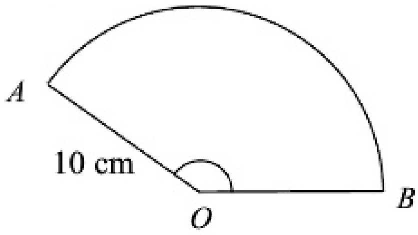
解： 扇形面积$=\frac{108^\circ}{360^\circ}\times\pi\times10^2$

$=\frac{3}{10}\times3.14\times100$

$=94.2\text{ cm}^2$

例题 5

右图中，OAB 是一扇形，$OA = 10$ cm。已知此扇形的面积为 40π cm²，求 $\angle AOB$。



解： 设 $\angle AOB = \theta$。

$$\text{扇形面积} = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

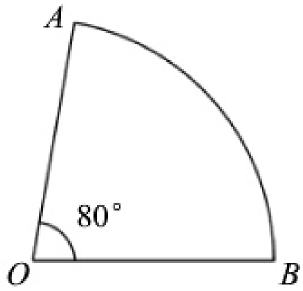
$$40\pi = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi \times 10^2$$

$$\theta = \frac{40}{100} \times 360^\circ$$

$$= 144^\circ$$

例题 6

右图中，OAB 是一扇形，$\angle AOB = 80^\circ$。已知此扇形的面积为 72π cm²，求 OA 的长。



解：

$$\text{扇形面积} = \frac{80^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$72\pi = \frac{80^\circ}{360^\circ} \times \pi \times r^2$$

$$r^2 = \frac{9}{2} \times 72$$

$$= 9 \times 36$$

$$r = 3 \times 6$$

$$= 18 \text{ cm}$$

$\therefore\ OA = 18$ cm

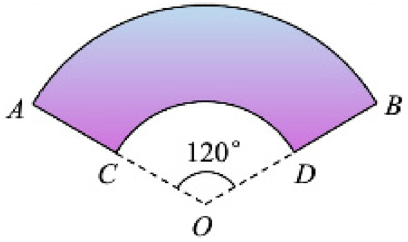
例题 7

右图中，OAB 及 OCD 是扇形，C、D 分别是 OA 与 OB 的中点，$\angle AOB = 120°$。若着色部分的面积为 154 cm^2，

(a) 求 OC 的长；

(b) 求着色部分的周长。

(取 $\pi = \dfrac{22}{7}$)



解： 设 $OC = r$，$OA = R$，则 $R = 2r$。

(a) 着色部分的面积 $= \dfrac{120°}{360°} \times \pi R^2 - \dfrac{120°}{360°} \times \pi r^2$

$$154 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \left[(2r)^2 - r^2\right]$$

$$154 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times r^2$$

$$r^2 = \frac{154 \times 7}{22}$$

$$= 7 \times 7$$

$$r = 7$$

$\therefore \quad OC = 7\text{ cm}$

(b) $R = 14\text{ cm}$

$AC = BD = 14 - 7 = 7\text{ cm}$

着色部分的周长 $= \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + AC + BD$

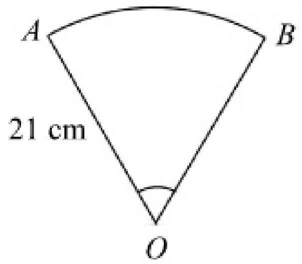
$$= \frac{120°}{360°} \times 2\pi R + \frac{120°}{360°} \times 2\pi r + 7 + 7$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{22}{7} \times (14 + 7) + 14$$

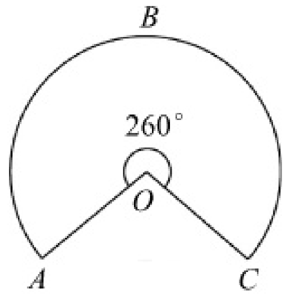
$$= 58\text{ cm}$$

随堂练习 5

1. 右图中，OAB 是一扇形，$OA = 21$ cm。已知扇形的面积为 231 cm^2，求 $\angle AOB$ (取 $\pi = \dfrac{22}{7}$)。

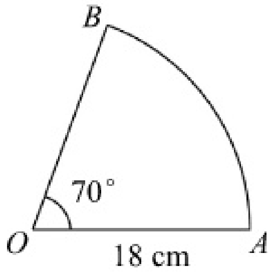


2. 右图中，$OABC$ 是一优扇形。已知 $\overset{\frown}{ABC} = 13\pi$ cm，求此扇形的面积，答案以 π 表示。

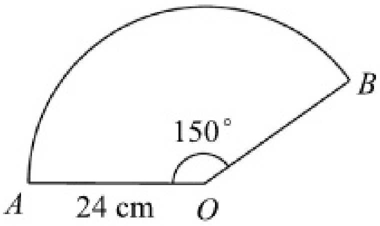


练习 7.2

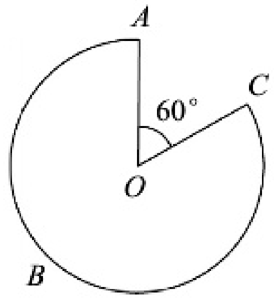
1. 右图中，OAB 是一扇形，$OA = 18$ cm，$\angle AOB = 70°$。
求 (a) $\overset{\frown}{AB}$；
(b) 此扇形的周长与面积。
(取 $\pi = \dfrac{22}{7}$)



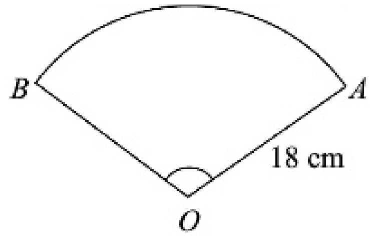
2. 右图中，OAB 是一扇形，$OA = 24$ cm，$\angle AOB = 150°$。
求 (a) $\overset{\frown}{AB}$；
(b) 此扇形的周长与面积。
答案以 π 表示。



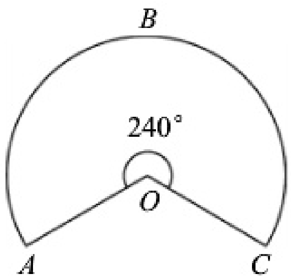
3. 右图中，$OABC$是一优扇形，$OA = 30\text{ cm}$，$\angle AOC = 60^\circ$。求
(a) $\overset{\frown}{ABC}$；
(b) 此扇形的周长与面积。
(取$\pi = 3.14$)



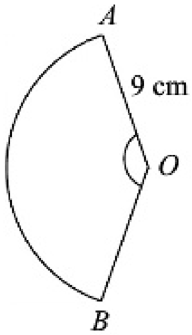
4. 右图中，OAB是一扇形，$OA = 18\text{ cm}$，$\overset{\frown}{AB} = 44\text{ cm}$。
求 (a) $\angle AOB$；
(b) 此扇形的面积。
(取$\pi = \dfrac{22}{7}$)



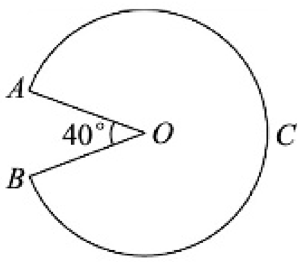
5. 右图中，$OABC$是一优扇形，优角$\angle AOC = 240^\circ$，$\overset{\frown}{ABC} = 125.6\text{ cm}$。求
(a) OA的长；
(b) 此扇形的面积。
(取$\pi = 3.14$)



6. 右图中，OAB是一扇形，$OA = 9\text{ cm}$，扇形的面积为99 cm^2。求
(a) $\angle AOB$；
(b) 此扇形的周长。
(取$\pi = \dfrac{22}{7}$)



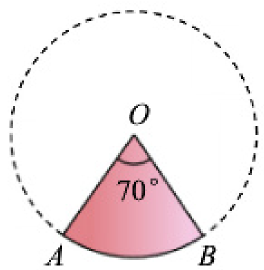
7. 右图中，$OACB$是一优扇形，$\angle AOB = 40^\circ$，扇形的面积为$648\pi\text{ cm}^2$。求
(a) OA的长；
(b) 此扇形的周长，答案以π表示。



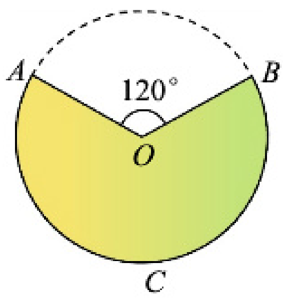
8. 完成下表。若有必要，答案以π表示。

	半径	圆心角	弧长	扇形面积
(a)	12 cm	45°		
(b)	18 mm		16π mm	
(c)	15 m			$\frac{525}{4}\pi\ \text{m}^2$
(d)		300°	10π mm	
(e)		135°		$24\pi\ \text{m}^2$
(f)			18π cm	$135\pi\ \text{cm}^2$

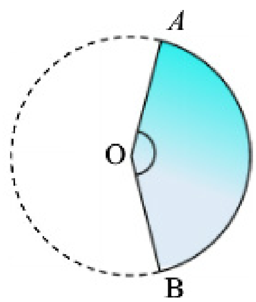
9. 右图中，OAB 是一扇形，$\angle AOB = 70°$，已知圆的周长是 18π cm，
(a) 求 $\overparen{AB}$ 的长；
(b) 求扇形 OAB 的面积；
答案以π表示。



10. 右图中，$OACB$ 是一优扇形，其面积为 $96\pi\ \text{cm}^2$。
(a) 求圆的面积，答案以π表示；
(b) 求圆的半径；
(c) 求 $\overparen{ACB}$ 的长，答案以π表示。



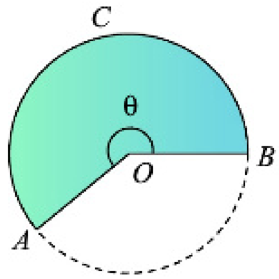
11. 右图中，OAB 是一扇形，$OA = 42$ mm，$\overparen{AB} = 110$ mm，
(a) 求 $\angle AOB$；
(b) 求扇形 OAB 的面积。
(取 $\pi = \frac{22}{7}$)



12. 如右图所示，O是圆心，优扇形$OACB$为圆的一部分。已知圆的周长是30π cm，扇形的面积为$\frac{275}{2}\pi\text{ cm}^2$，

(a) 求θ；

(b) 求优扇形$OACB$的周长，答案以π表示。

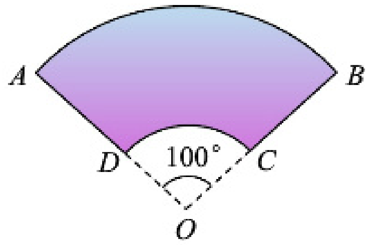


13. 右图中，OAB与OCD是扇形，$\angle COD = 100°$，$OD:OA = 2:5$，$AD = 9$ cm。

(a) 求着色部分的周长；

(b) 求着色部分的面积；

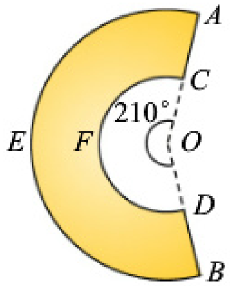
答案以π表示。



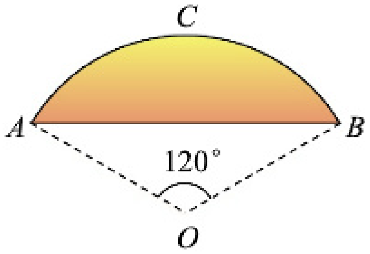
14. 右图所示的薄片是由两个以O为圆心的优弧$\overset{\frown}{AEB}$，$\overset{\frown}{CFD}$及两条线段AC，BD所围成。已知 $OC = CA$，$\angle AOB = 210°$，薄片的面积为$175\pi\text{ cm}^2$

(a) 求OC的长；

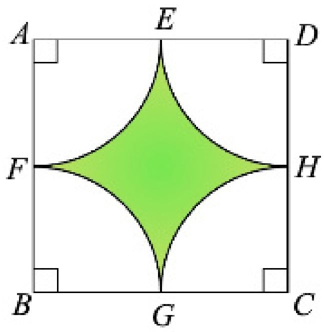
(b) 求薄片的周长；答案以π表示。



15. 右图中，$\overset{\frown}{ACB}$是以O为圆心的弧。已知$OA = 30$ cm，$\angle AOB = 120°$，求弓形ACB的面积(取$\pi = 3.14$)。



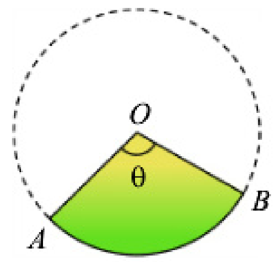
16. 右图中，$ABCD$是一正方形，$\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{FG}$，$\overset{\frown}{GH}$，$\overset{\frown}{HE}$是分别以A，B，C，D为圆心的弧。若着色部分的周长为157 cm，求着色部分的面积(取$\pi = 3.14$)。



总复习题 7

1. 已知一正方形的周长与一直径为 20 cm 的圆的周长相等，求正方形的边长(取 $\pi=3.14$)。

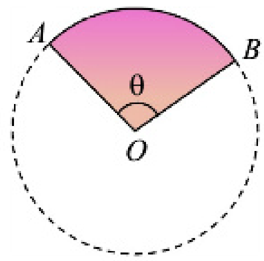
2. 右图中，O 是圆心，圆的周长是 132 cm，$\overset{\frown}{AB}$ 的长是圆的周长的 $\frac{7}{24}$。



   (a) 求 θ；
   (b) 求圆的半径；
   (c) 求扇形 OAB 的周长；
   (d) 求扇形 OAB 的面积。

   (取 $\pi=\frac{22}{7}$)

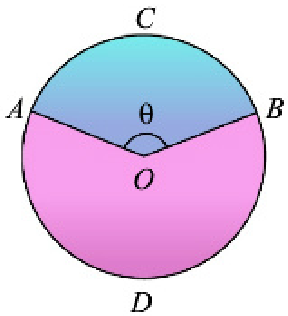
3. 右图中，O 是圆心，圆的面积是 1386 cm^2，扇形 OAB 的面积是圆的面积的 $\frac{5}{18}$。



   (a) 求 θ；
   (b) 求圆的半径；
   (c) 求扇形 OAB 的周长。

   (取 $\pi=\frac{22}{7}$)

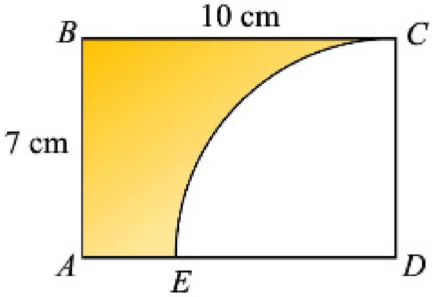
4. 右图中，O 是圆心。已知 $\overset{\frown}{ACB}:\overset{\frown}{ADB}=3:5$，求 θ。



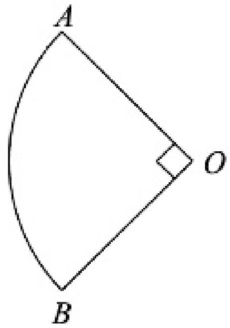
5. 小明骑脚踏车行了 5495 m。若脚车轮的直径是 70 cm，问脚车轮转了几圈(取 $\pi=3.14$)?

6. 已知二圆的半径之比为 2:3，求此二圆的
   (a) 周长之比；
   (b) 面积之比。

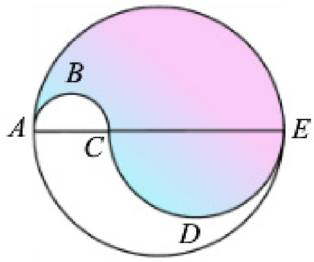
7. 右图中，$ABCD$是一长方形，$AB=7\text{ cm}$，$BC=10\text{ cm}$；CDE是一扇形。求着色部分的周长与面积（取$\pi=\frac{22}{7}$）。



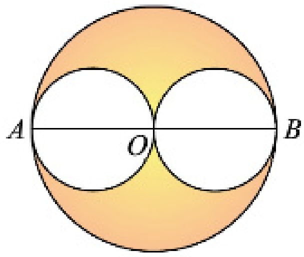
8. 右图中，OAB是一扇形，$OA\perp OB$。已知此扇形的周长为50 cm，求此扇形的面积（取$\pi=\frac{22}{7}$）。



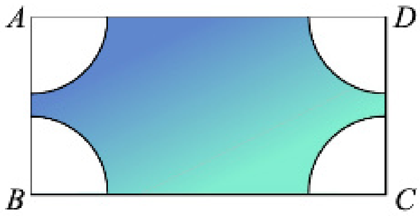
9. 右图中，ACE是大圆的直径，ABC及CDE是分别以AC及CE为直径的半圆周，$AC:CE=1:3$，$AE=12\text{ cm}$。求着色部分的周长与面积，答案以π表示。



10. 右图中，O是大圆的圆心，AB是大圆的直径，OA与OB是两个小圆的直径。若大圆的面积是48 cm^2，求着色部分的面积。



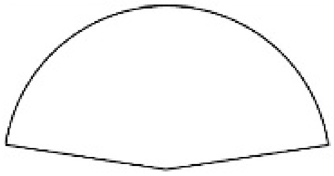
11. 右图中，$ABCD$是一长方形，$AB=16\text{ cm}$，$BC=32\text{ cm}$。在长方形的四个角落分别剪去半径为7 cm的四分之一圆后，便得到着色部分的图形。求着色部分的周长与面积（取$\pi=\frac{22}{7}$）。



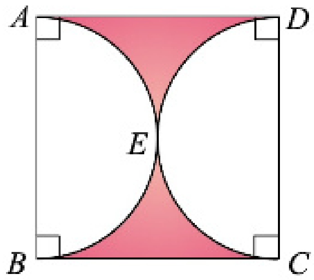
12. 右图所示的扇形是由一长 32 cm 的铁线所围成，其半径是 6 cm。

(a) 求此扇形的圆心角，答案以π表示；

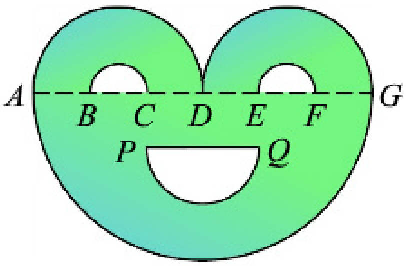
(b) 求此扇形的面积。



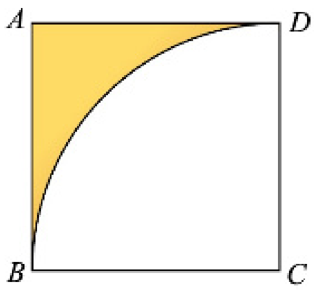
13. 右图中，$ABCD$是一正方形，AEB及CED是以AB及CD为直径的半圆。若正方形$ABCD$的面积为 400 cm^2，求着色部分的周长与面积 (取$\pi = 3.14$)。



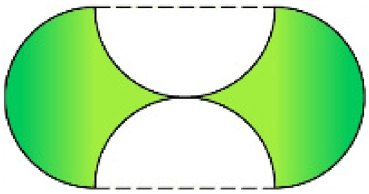
14. 丽萍用卡纸制作了如右图所示的面具，其中的每一段曲边都是半圆周，$ABCDEFG$是一直线，$AB = BC = CD = DE = EF = FG$，$AG = 18$ cm，$PQ = 6$ cm。求此面具的面积，答案以π表示。



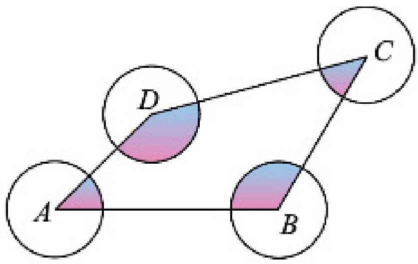
15. 右图中，$ABCD$是一正方形，$\overset{\frown}{BD}$是以C为圆心的弧。求着色部分的面积与空白部分的面积之比，答案以π表示。



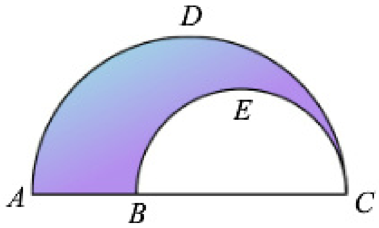
16. 右图中的着色部分是由四个直径为 8 cm 的半圆周所围成。求着色部分的面积。



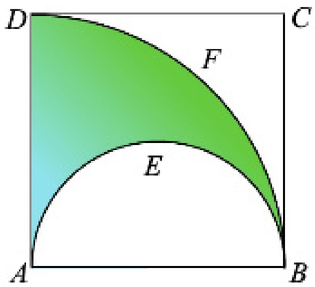
17. 右图中，以 A，B，C，D 四点为圆心的四个圆的面积都是 $11\ cm^2$。求着色部分的面积。



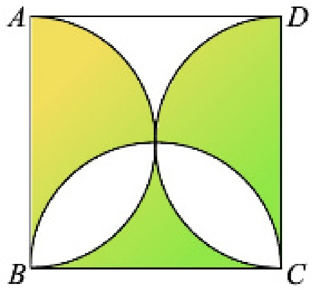
18. 右图中，ABC 是一条直线，$AB:BC=1:2$，ADC 及 BEC 是半圆周。求图中着色部分与空白部分的面积之比。



19. 右图中，$ABCD$ 是一边长为 $14\ cm$ 的正方形，AEB 是以 AB 为直径的半圆，$\overset{\frown}{BD}$ 是以 A 为圆心的弧。求着色部分的周长与面积(取 $\pi=\dfrac{22}{7}$)。



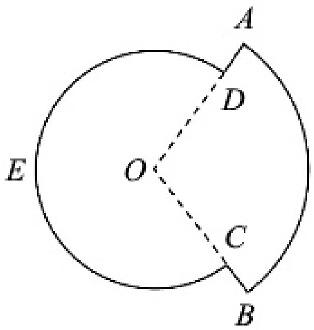
20. 右图所示为三个分别以 AB，BC 及 CD 为直径的半圆，$ABCD$ 是一个面积为 $400\ cm^2$ 的正方形。求着色部分的面积(取 $\pi=3.14$)。



21. 右图所示的图形是由劣扇形 OAB 及优扇形 $OCED$ 所拼合而成。两个扇形的半径各为 $7\ cm$ 及 $9\ cm$，$\angle AOB=108°$。

(a) 求此图形的周长，答案以 π 表示；

(b) 求劣扇形 OAB 与优扇形 $OCED$ 的面积之比。



8 毕氏定理

学习目标

- 掌握毕氏定理及其逆定理
- 能应用距离公式

8.1 毕氏定理

图8-1是一个直角三角形ABC，c是斜边，a与b是两条直角边。

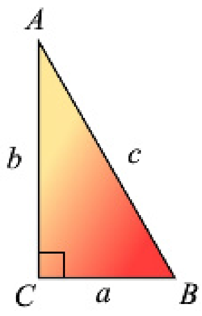


图8-1

取四个与ΔABC全等的直角三角形，如图8-2那样放在边长为$a+b$的正方形内，得到边长分别为a及b的正方形I及II。

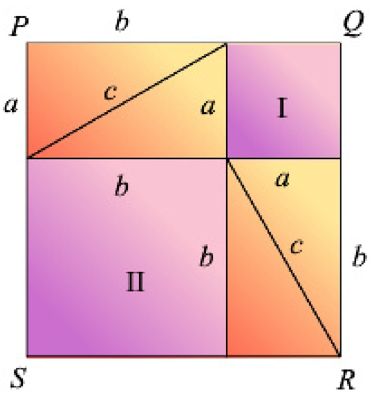


图8-2

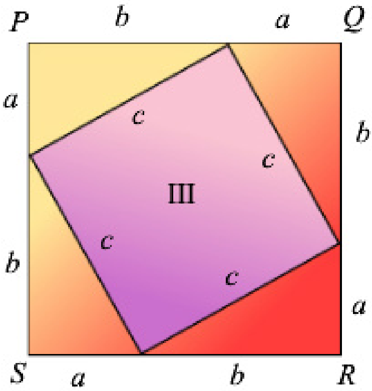


图8-3

再将同样的四个直角三角形，如图8-3那样放在边长为$a+b$的正方形内。此时，得到的四边形III也是正方形，其边长等于ΔABC的斜边c。

在图8-2中，正方形$PQRS$的面积$=a^2+b^2+4\times\Delta ABC$的面积。

在图8-3中，正方形$PQRS$的面积$=c^2+4\times\Delta ABC$的面积。

所以$a^2+b^2=c^2$。

由此可得以下的定理：

毕氏定理　直角三角形的两个直角边a，b的平方和，等于斜边c的平方，即$a^2+b^2=c^2$。

思考题

图8-3中为何四边形III是一个正方形?

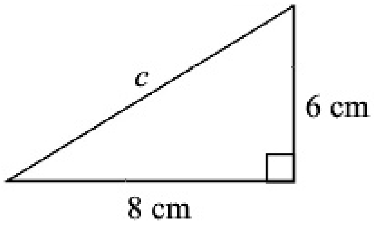
补充资料

这个定理是由古希腊数学家毕达哥拉斯于公元前500年发现的，后来由欧几里德约在公元前300年加以证明，命名为毕达哥拉斯定理，简称为毕氏定理。然而，早在公元前1100年，中国人商高已发现这个定理，所以这个定理也称为商高定理或勾股定理。

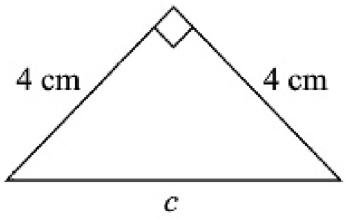
例题 1

下列各图中，求 c：

(a)



(b)



解： (a)

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ &= 6^2 + 8^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad c &= \sqrt{100} \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

(b)

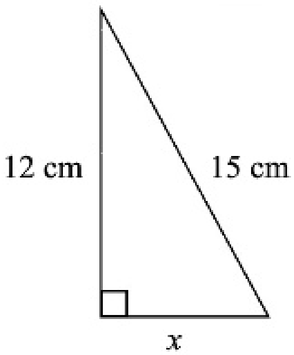
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ &= 4^2 + 4^2 \\ &= 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad c &= \sqrt{32} \\ &= 4\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

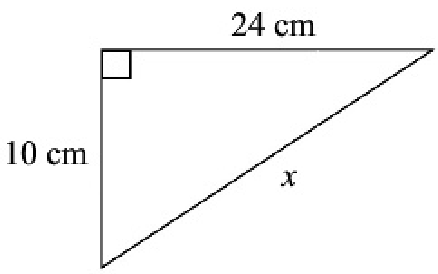
例题 2

下列各图中，求 x：

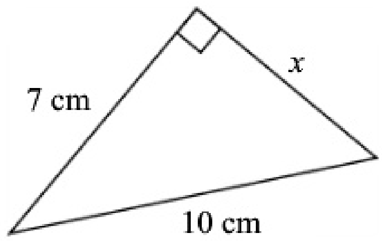
(a)



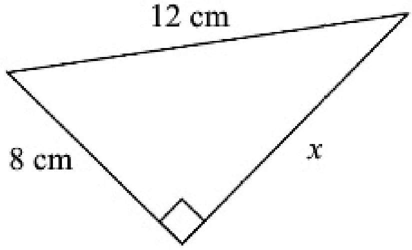
(b)



(c)



(d)



解： (a)

$$x^2+12^2=15^2$$
$$x^2=15^2-12^2$$
$$=81$$
$$\therefore \quad x=\sqrt{81}$$
$$=9\text{ cm}$$

(b)

$$x^2=24^2+10^2$$
$$=676$$
$$\therefore \quad x=\sqrt{676}$$
$$=26\text{ cm}$$

(c)

$$x^2=10^2-7^2$$
$$=51$$
$$\therefore \quad x=\sqrt{51}\text{ cm}$$

(d)

$$x^2=12^2-8^2$$
$$=80$$
$$\therefore \quad x=\sqrt{80}$$
$$=4\sqrt{5}\text{ cm}$$



补充资料

(b)小题中的解法也可以用以下的方法运算：

$$x^2=24^2+10^2$$
$$=2^2\left(12^2+5^2\right)$$
$$=2^2(169)$$
$$x=2\times13$$
$$=26$$

例题 3

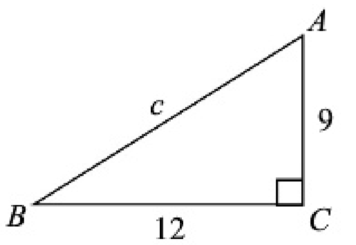
在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，

(a) 若 $a=12$，$b=9$，求 c；

(b) 若 $b=12$，$c=20$，求 a。

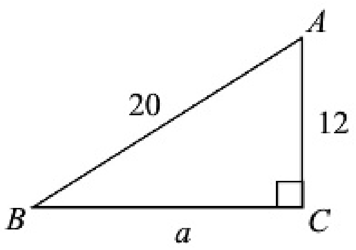
解： (a)

$$c^2=12^2+9^2$$
$$=225$$
$$\therefore\ c=\sqrt{225}$$
$$=15$$



(b)

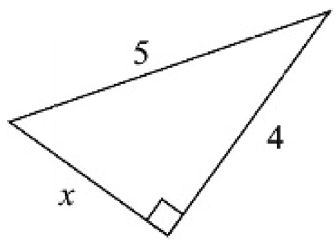
$$a^2=20^2-12^2$$
$$=256$$
$$\therefore\ a=\sqrt{256}$$
$$=16$$



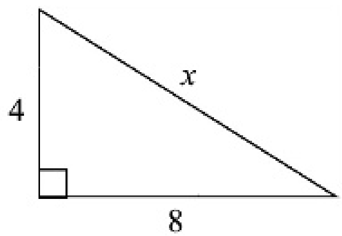
随堂练习 1

1. 下列各图中，求 x：

(a)



(b)



2. 在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，

(a) 若 $a=9$，$b=12$，求 c；

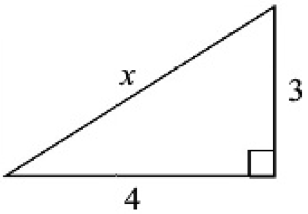
(b) 若 $a=8$，$c=10$，求 b；

(c) 若 $b=1$，$c=2$，求 a。

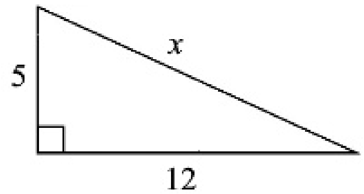
练习 8.1a

1. 下列各图中，求 x：

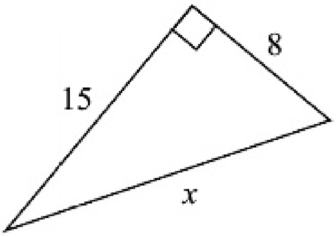
(a)



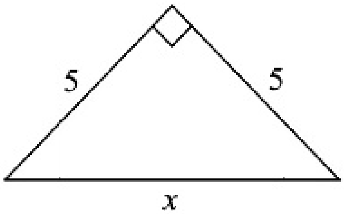
(b)



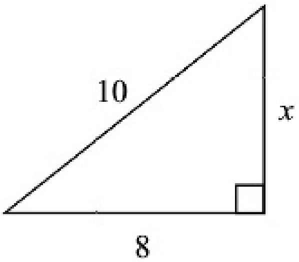
(c)



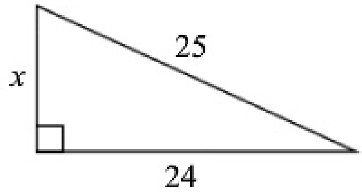
(d)



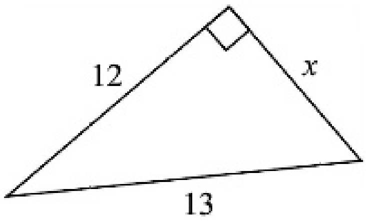
(e)



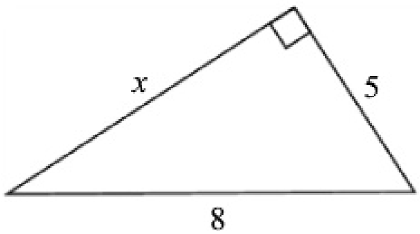
(f)



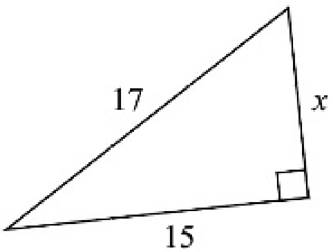
(g)



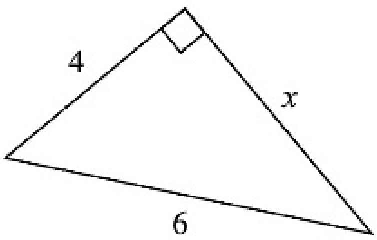
(h)



(i)



(j)



2. 在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，若

(a) $b=7$，$a=24$，求 c；

(b) $a=9$，$c=15$，求 b；

(c) $c=10$，$b=8$，求 a；

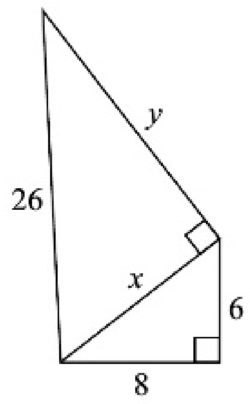
(d) $a=10$，$b=12$，求 c；

(e) $b=6$，$c=14$，求 a；

(f) $a=10$，$c=20$，求 b。

例题 4

右图中，求 x，y。



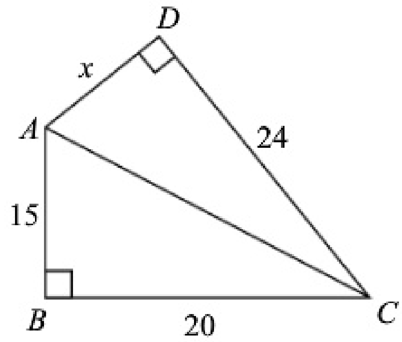
解：

$$x^2=6^2+8^2$$
$$=100$$
$$\therefore\ x=\sqrt{100}$$
$$=10$$

$$26^2=x^2+y^2$$
$$y^2=26^2-10^2$$
$$=(26+10)(26-10)$$
$$=36\times16$$
$$\therefore\ y=6\times4$$
$$=24$$

例题 5

右图中，求x。



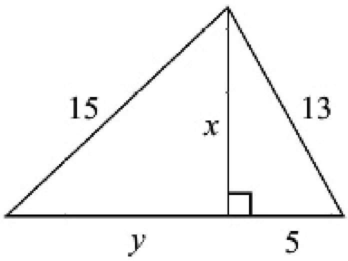
解：

$$AC^2 = 15^2 + 20^2$$
$$= 625$$
$$AC^2 = x^2 + 24^2$$
$$x^2 = 625 - 24^2$$
$$= 49$$
$$\therefore \quad x = \sqrt{49}$$
$$= 7$$

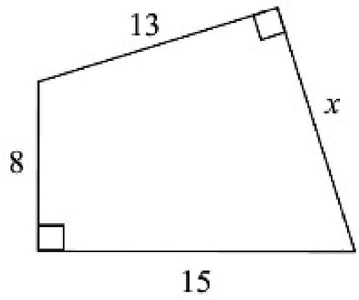
随堂练习 2

1. 下列各图中，求x，y：

(a)



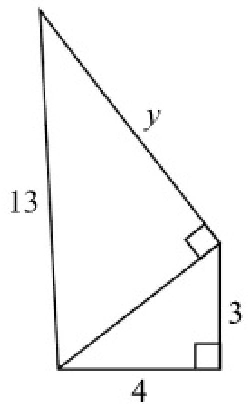
(b)



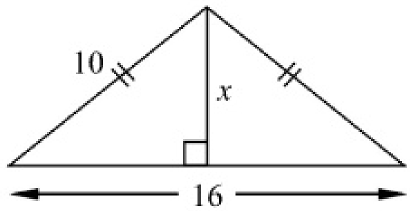
练习 8.1b

下列各图中，求x，y：

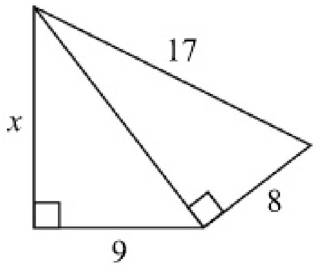
1.



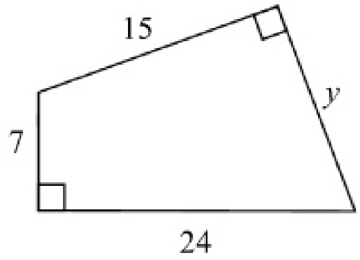
2.



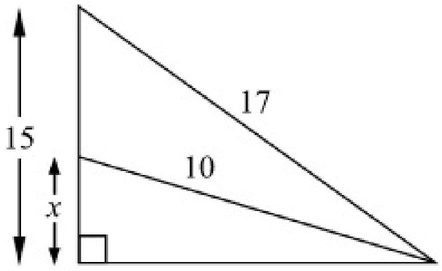
3.



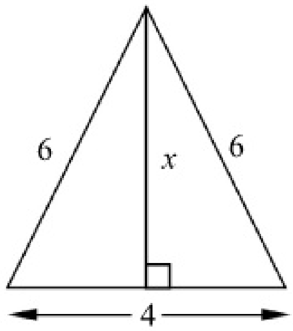
4.



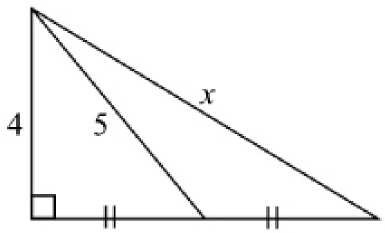
5.



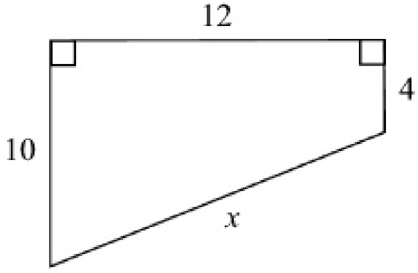
6.



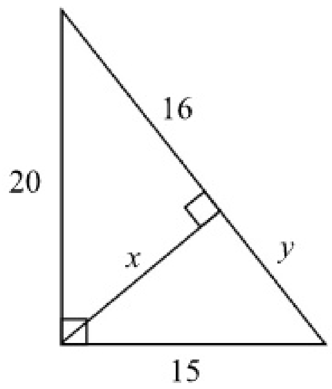
7.



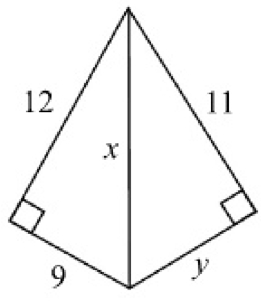
8.



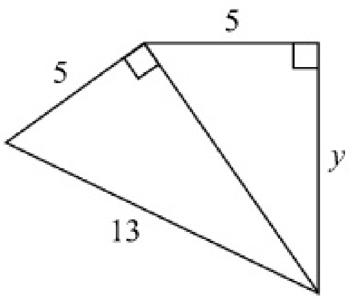
9.



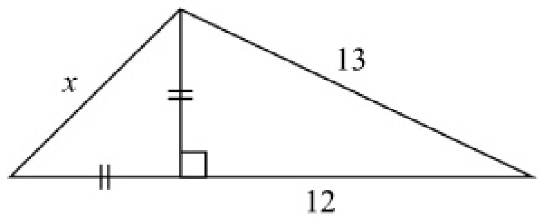
10.



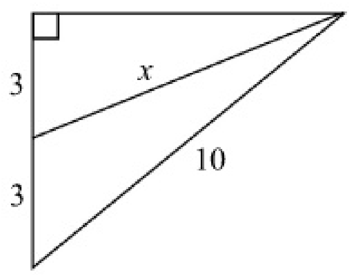
11.



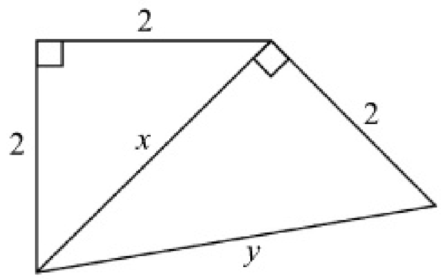
12.



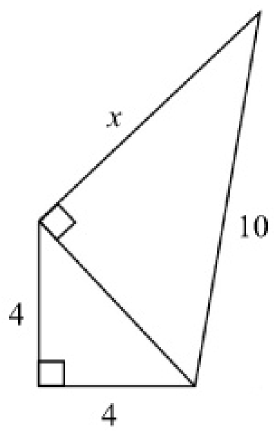
13.



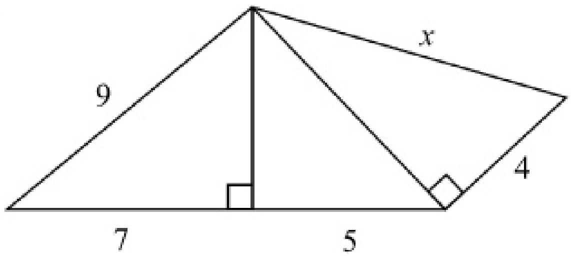
14.



15.



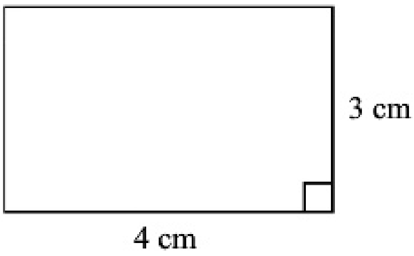
16.



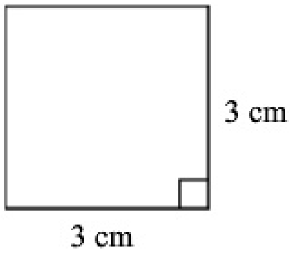
例题 6

求下列正方形或长方形的对角线的长度。

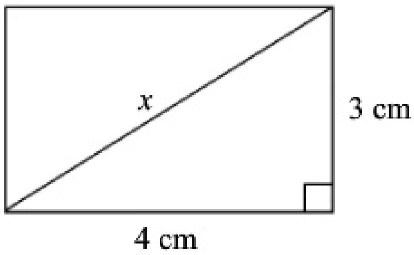
(a)



(b)



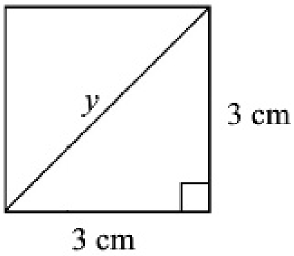
解： (a) 设对角线的长为 x cm。



$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$= 25$$
$$x = 5$$

∴ 对角线的长为 5 cm。

(b) 设对角线的长为 y cm。

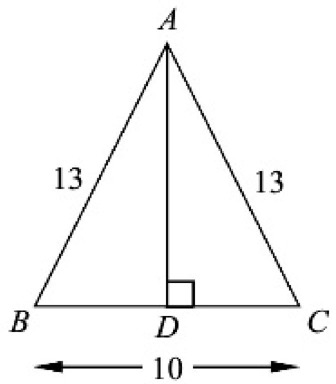


$$y^2 = 3^2 + 3^2$$
$$= 18$$
$$y = \sqrt{18}$$
$$= 3\sqrt{2}$$

∴ 对角线的长为 $3\sqrt{2}$ cm。

例题 7

在等腰ΔABC中，已知$AB = AC = 13$ cm，$BC = 10$ cm，求ΔABC的面积。



解： 作高AD，则$BD = DC = 5$ cm

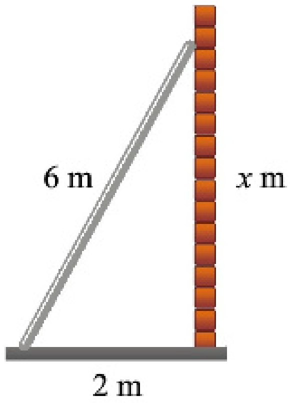
$$AD^2 + BD^2 = AB^2$$
$$AD^2 + 5^2 = 13^2$$
$$AD^2 = 13^2 - 5^2$$
$$= 144$$
$$AD = \sqrt{144}$$
$$= 12 \text{ cm}$$

$\therefore$ ΔABC的面积$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12$

$= 60 \text{ cm}^2$

例题 8

一 6 m 长的梯子靠在墙壁上，梯脚离墙 2 m，求梯顶离地面的高度。



解： 设梯顶离地面的高度为x m。

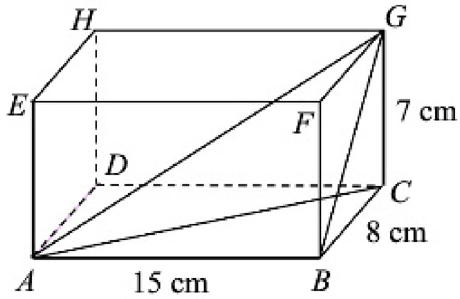
$$x^2 = 6^2 - 2^2$$
$$= 32$$
$$x = \sqrt{32}$$
$$= 4\sqrt{2}$$

$\therefore$ 梯顶离地面$4\sqrt{2}$ m。

例题 9

右图所示为一个长方体，求下列各线段的长：

(a) AC (b) BG (c) AG



解： (a) $\because \angle ABC = 90°$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$
$= 15^2 + 8^2$
$= 289$
$AC = \sqrt{289}$
$= 17$ cm

(b) $\because \angle BCG = 90°$

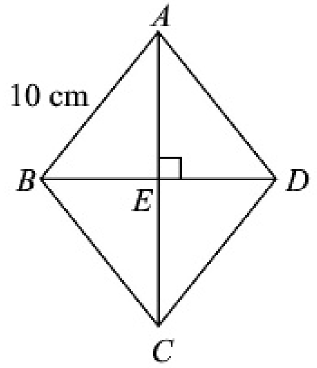
$\therefore BG^2 = BC^2 + CG^2$
$= 8^2 + 7^2$
$= 113$
$BG = \sqrt{113}$ cm

(c) $\because \angle ACG = 90°$

$\therefore AG^2 = AC^2 + CG^2$
$= 289 + 7^2$
$= 338$
$AG = \sqrt{338}$
$= 13\sqrt{2}$ cm

例题 10

已知菱形的周长是40 cm，其中一条对角线的长是12 cm。求它的面积。



解： ∵ 菱形的周长是40 cm

∴ 它的边长 = 10 cm

对角线 $BD = 12$ cm

∴ $BE = 6$ cm

∵ $\angle AEB = 90°$

∴ $AE^2 = AB^2 - BE^2$

$= 10^2 - 6^2$

$= 64$

$AE = 8$ cm

∴ $AC = 16$ cm

∴ 菱形的面积 $= \frac{1}{2} \times 12 \times 16$

$= 96\ \text{cm}^2$

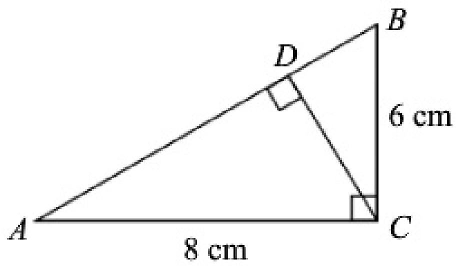
例题 11

右图中，$\angle C = 90°$，$AC = 8$ cm，$BC = 6$ cm。求

(a) ΔABC 的面积；

(b) AB 的长；

(c) CD 的长。



解： (a) ΔABC 的面积 $= \frac{1}{2} \times 8 \times 6$

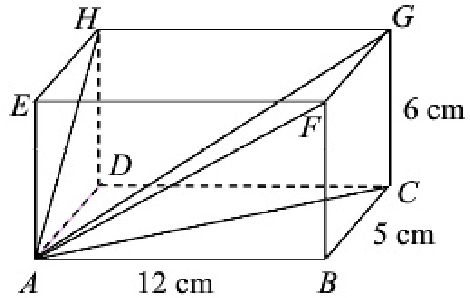
$= 24\ \text{cm}^2$

(b) $AB^2 = AC^2 + BC^2$
$= 8^2 + 6^2$
$= 100$
$AB = 10\text{ cm}$

(c) ΔABC 的面积 $= \frac{1}{2} \times AB \times CD$
$\therefore \quad 24 = \frac{1}{2} \times 10 \times CD$
$CD = \frac{24}{5}$
$= 4.8\text{ cm}$

随堂练习 3

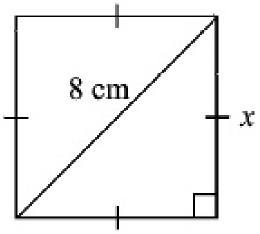
1. 一4 m长的梯子靠在墙壁上，梯脚离墙1 m，求梯顶离地面的高度。
2. 已知菱形的周长是100 cm，其中一条对角线的长是48 cm。求它的面积。
3. 一等腰直角三角形的斜边长为18 cm，求其面积。
4. 在右图的长方体中，求下列各线段的长度：
   (a) AC　　(b) AH
   (c) AF　　(d) AG



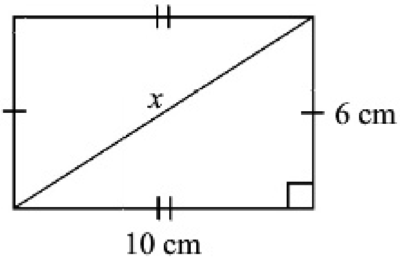
练习 8.1c

1. 下列各图中，求 x：

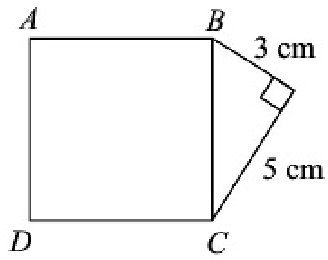
(a)



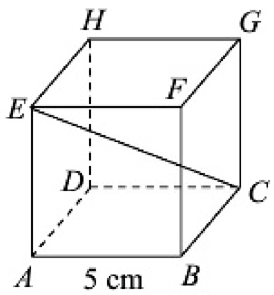
(b)



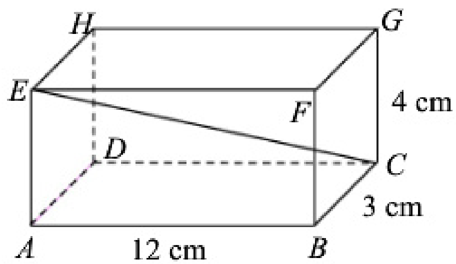
2. 一根竹竿长10 m，靠在墙壁上，在地面的一端离墙脚3 m，求竹竿顶端离地面的高度。
3. 一菱形的两条对角线各长8 cm及6 cm，求其边长。
4. 一艘船由东向西航行5 km，然后向正北航行12 km，求由起点至终点的距离。
5. 一架飞机从 P 地向南飞行120 km，接着向东飞行150 km，然后再向北飞行200 km至 Q 地，求 P，Q 两地的距离。
6. 右图中，求正方形 $ABCD$ 的面积。



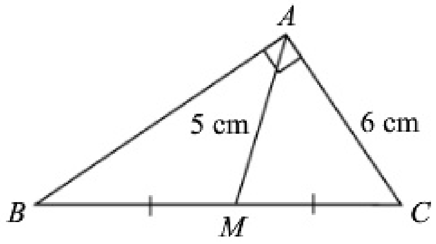
7. 右图所示为一正方体，求对角线 EC 的长。



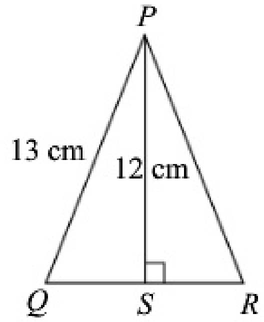
8. 右图所示为一长方体，求对角线 EC 的长。



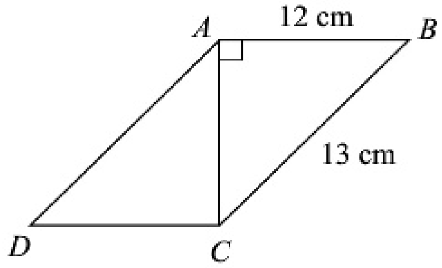
9. 右图中，$\angle BAC = 90°$，M 是 BC 的中点，$AC = 6$ cm，$AM = 5$ cm，求 AB 的长。



10. 右图中，$PQ = PR = 13$ cm，$PS = 12$ cm，求 ΔPQR 的面积。

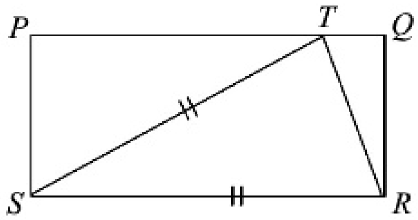


11. 右图中，$ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC 垂直于 AB。若 $AB = 12$ cm，$BC = 13$ cm，求 $ABCD$ 的面积。

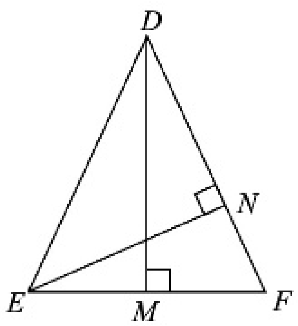


12. 已知一长方形的宽为 7 cm，对角线为 25 cm。求长方形的长及其面积。

13. 右图中，$PQRS$ 是一长方形，$PQ = 10$ cm，$PS = 6$ cm，T 为 PQ 上的一点使得 $ST = SR$，求 RT 的长。



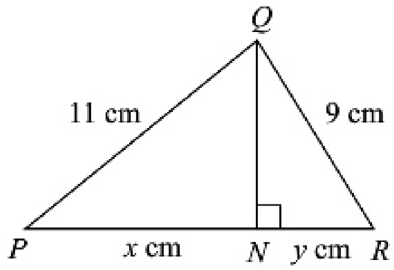
14. 右图中，$DE = DF = 17$ cm，$EF = 16$ cm。求 DM 及 EN 的长。



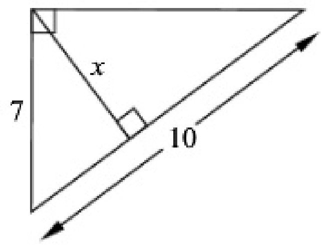
15. 右图中，

(a) 求 x^2-y^2 的值；

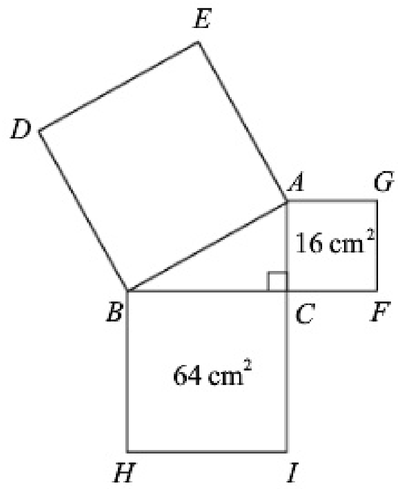
(b) 若 $PR=8$ cm，求 $x-y$ 的值。



16. 右图中，求 x。



17. 右图所示是以 ΔABC 的三个边长画出的三个正方形。若正方形 $ACFG$ 及 $BHIC$ 的面积分别为 16 cm^2 及 64 cm^2，求正方形 $ABDE$ 的面积。



8.2 毕氏定理的逆定理

如果 ΔABC 的三个边的长 a，b，c 有以下的关系：$a^2+b^2=c^2$，那么 ΔABC 是直角三角形，且 c 为其斜边。

这就是毕氏定理的逆定理，其证明如下：

已知在 ΔABC 中，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，且 $a^2+b^2=c^2$，证明 $\angle C=90°$。

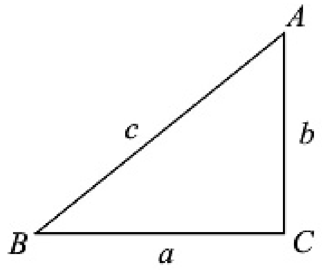


图 8-4(a)

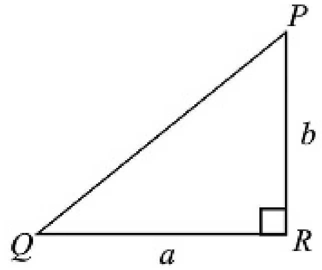


图 8-4(b)

证明：作 ΔPQR 使得 $\angle R=90°$，$QR=a$，$PR=b$

由毕氏定理得 $PQ^2=a^2+b^2$

$\because \quad a^2+b^2=c^2$

$\therefore \quad PQ^2=c^2$

$\therefore \quad PQ=c$

在 ΔABC 与 ΔPQR 中，$AB=c=PQ$

$BC=a=QR$

$AC=b=PR$

$\therefore \quad \Delta ABC \cong \Delta PQR \quad$ (SSS)

$\therefore \quad \angle C=\angle R=90° \quad$ (对应角相等)

要判断一个三角形是否为直角三角形，只需判断最长的一边的平方是否等于另外两边的平方和即可。

例题 1

下列各组长度为一三角形的三个边长，判断该三角形是否为直角三角形。

(a) 8，15，17

(b) 10，24，26

(c) 4，3，2

(d) 1，2，$\sqrt{3}$

解： (a) $8^2+15^2=289$

$17^2=289$

$\because \quad 8^2+15^2=17^2$

$\therefore$ 三边的长为 8，15，17 的三角形是一直角三角形。

(b) $10^2 + 24^2 = 676$

$26^2 = 676$

$\because\ 10^2 + 24^2 = 26^2$

$\therefore$ 三边的长为 10，24，26 的三角形是一直角三角形。

(c) $3^2 + 2^2 = 13$

$4^2 = 16$

$\because\ 3^2 + 2^2 \neq 4^2$

$\therefore$ 三边的长为 4，3，2 的三角形不是一直角三角形。

(d) $1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4$

$2^2 = 4$

$\because\ 1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2^2$

$\therefore$ 三边的长为 1，2，$\sqrt{3}$ 的三角形是一直角三角形。

随堂练习 4

下列各组长度为一三角形的三个边长，判断该三角形是否为直角三角形。

1. 9，12，15
2. 4，6，8
3. $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$
4. 2，2，$2\sqrt{2}$
5. 8，15，19
6. 4，7，$\sqrt{65}$

练习 8.2

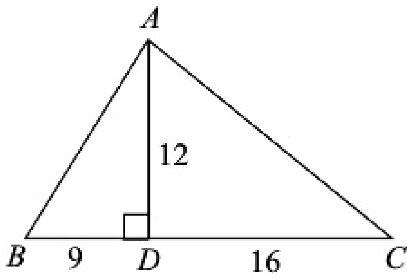
1. 下列各组长度为一三角形的三个边长，判断该三角形是否为直角三角形。

(a) 4，5，6　　(b) 5，12，13

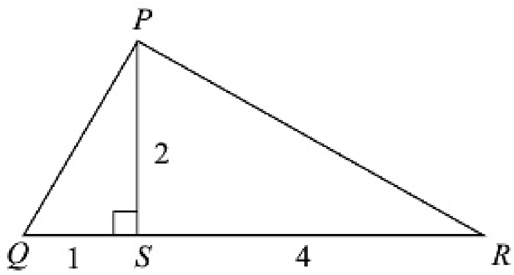
(c) 1，2，$\sqrt{5}$　　(d) 1，1，$\sqrt{2}$

(e) 3，5，7　　(f) 6，7，9

2. 右图中，证明 $\angle BAC = 90°$。



3. 右图中，证明 ΔPQR 是直角三角形。



8.3 距离公式

在初中一，我们已经学过了直角坐标系，现在我们来学如何求出坐标系上两点的距离。先看以下的例子：

设 A 为 $(1, 1)$，B 为 $(5, 4)$，作 AC 平行于 x 轴及作 BC 平行于 y 轴，那么 $\angle C = 90°$，所以 ΔABC 是直角三角形。

$$AC = 5 - 1$$
$$= 4$$
$$BC = 4 - 1 = 3$$

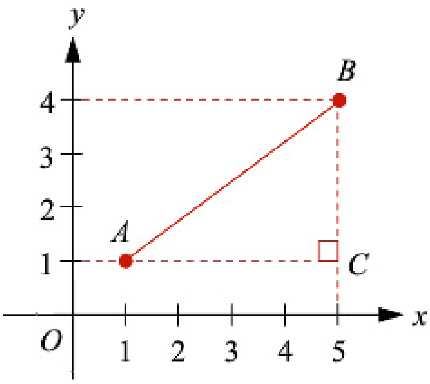


图 8-5

$$\therefore \quad AB^2 = 4^2 + 3^2$$
$$= 25$$
$$AB = 5$$

设 A 为 (x_1, y_1)，B 为 (x_2, y_2)， $AB = d$，作 AC 平行于 x 轴，BC 平行于 y 轴，则

$$AC = |x_2 - x_1|$$

$$BC = |y_2 - y_1|$$

$$\therefore \quad d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

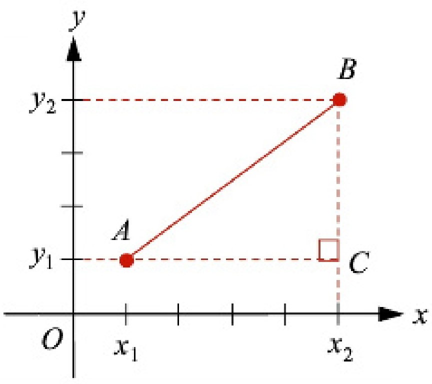


图 8-6

这个公式称为距离公式。

两点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的距离为

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

例题 1

求下列各题中两点的距离：

(a) $A(2, 1)$， $B(8, 9)$

(b) $C(1, -2)$， $D(6, 10)$

(c) $M(-3, 1)$， $N(5, -5)$

(d) $P(-1, -1)$， $Q(-5, 7)$

解： (a) $AB = \sqrt{(8-2)^2 + (9-1)^2}$

$$= \sqrt{6^2 + 8^2}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10$$

(b) $CD = \sqrt{(6-1)^2 + [10-(-2)]^2}$
$= \sqrt{5^2 + 12^2}$
$= \sqrt{169}$
$= 13$

(c) $MN = \sqrt{[5-(-3)]^2 + (-5-1)^2}$
$= \sqrt{8^2 + (-6)^2}$
$= \sqrt{100}$
$= 10$

(d) $PQ = \sqrt{[-5-(-1)]^2 + [7-(-1)]^2}$
$= \sqrt{(-4)^2 + 8^2}$
$= \sqrt{80}$
$= 4\sqrt{5}$

例题 2

已知 ΔABC 各顶点为 $A(-2, 1)$，$B(4, 4)$ 及 $C(1, -2)$，证明 ΔABC 是等腰三角形。

解： $AB = \sqrt{[4-(-2)]^2 + (4-1)^2}$
$= \sqrt{6^2 + 3^2}$
$= \sqrt{45}$

$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + [1-(-2)]^2}$
$= \sqrt{(-3)^2 + 3^2}$
$= \sqrt{18}$

(续) $BC=\sqrt{(1-4)^2+(-2-4)^2}$

$=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2}$

$=\sqrt{45}$

$\because$ $AB=BC$

$\therefore$ ΔABC 是等腰三角形

随堂练习 5

1. 求下列各题中两点的距离：

   (a) $A(4,1)$，$B(1,-3)$ (b) $C(7,-3)$，$D(1,5)$

   (c) $E(-2,9)$，$F(6,-6)$ (d) $P(-3,1)$，$Q(-7,-5)$

2. 已知 $A(-1,2)$，$B(3,5)$ 及 $C(3,-1)$，证明 ΔABC 是等腰三角形。

练习 8.3

1. 求下列各题中两点的距离：

   (a) $A(-5,1)$，$B(7,-6)$ (b) $C(-1,4)$，$D(-2,-2)$

   (c) $E(0,5)$，$F(12,0)$ (d) $G(4,-11)$，$H(-5,1)$

   (e) $J(2,-1)$，$K(4,2)$ (f) $M(-2,5)$，$N(3,-7)$

   (g) $P(p,4p)$，$Q(-2p,8p)$ (h) $R(-2m,5m)$，$S(-4m,-2m)$

2. 证明顶点为 $(9,5)$，$(5,-1)$，$(-1,3)$ 的三角形是一个等腰三角形。
3. 证明顶点为 $(5,1)$，$(-9,3)$，$(-3,9)$ 的三角形是一个直角三角形。
4. 已知 $A(1,2)$，$B(0,-1)$ 及 $C(3,-2)$，证明 ΔABC 是一个等腰直角三角形。
5. 已知 $P(-4,1)$，$Q(-3,-2)$，$R(0,-1)$ 及 $S(-1,2)$，

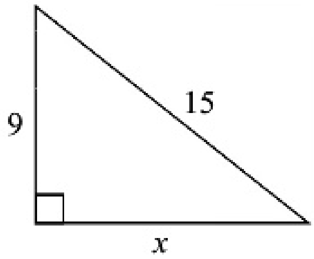
   (a) 求四边形 $PQRS$ 的各边及对角线的长；

   (b) $PQRS$ 是哪一类四边形？

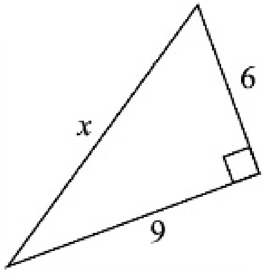
总复习题 8

1. 下列各图中，求 x：

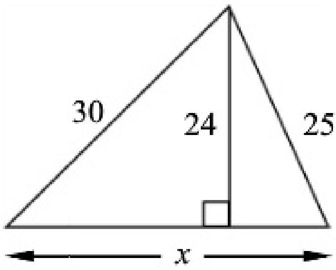
(a)



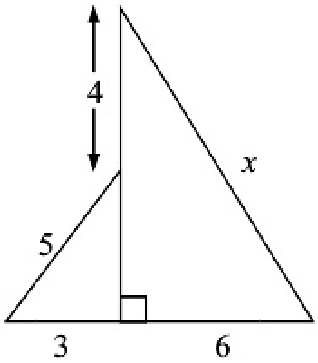
(b)



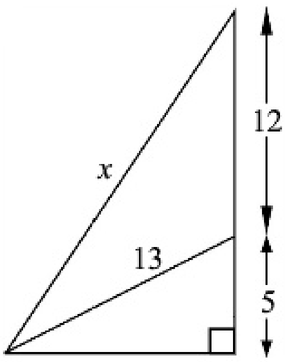
(c)



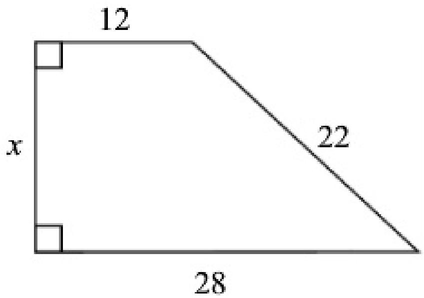
(d)



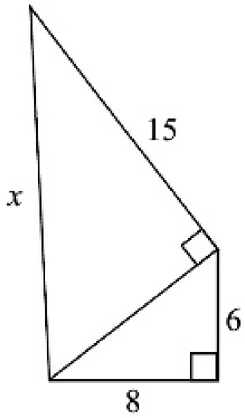
(e)



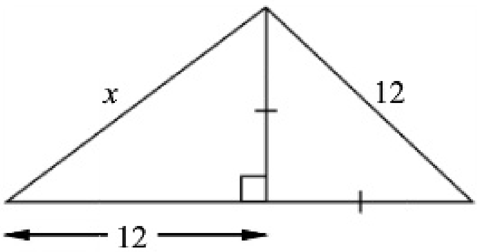
(f)



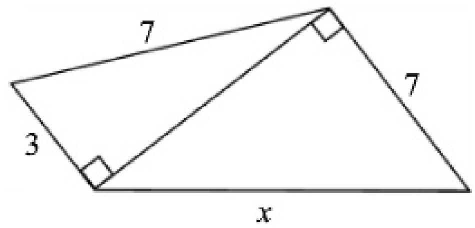
(g)



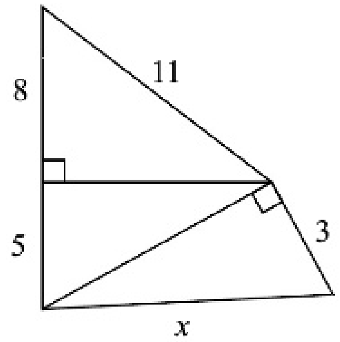
(h)



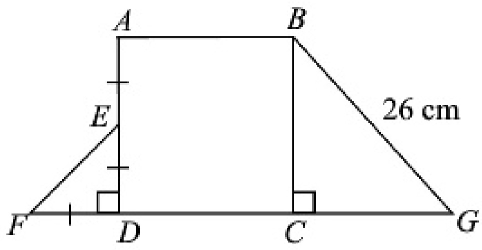
(i)



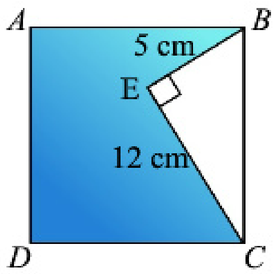
(j)



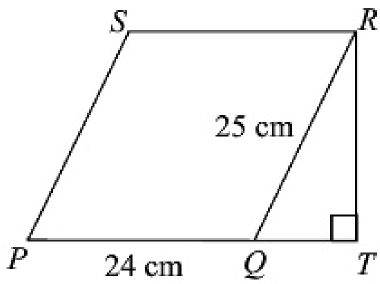
2. 右图中，$ABCD$ 是一个正方形，$FDCG$ 是一条直线。若 $ABCD$ 的面积是 $100\ \text{cm}^2$，求
   (a) BC 的长；
   (b) CG 的长；
   (c) EF 的长。



3. 右图中，$ABCD$ 是一个正方形，求着色部分的面积。

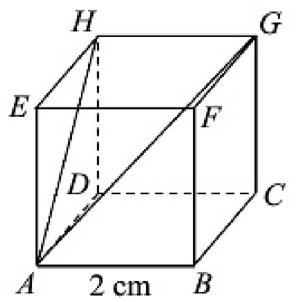


4. 右图中，$PQRS$ 是一个平行四边形，PQT 是一直线，$\angle QTR = 90°$，$PQ = 24$ cm，$RQ = 25$ cm，$PQRS$ 的面积是 $480\ \text{cm}^2$，求 QT 的长。

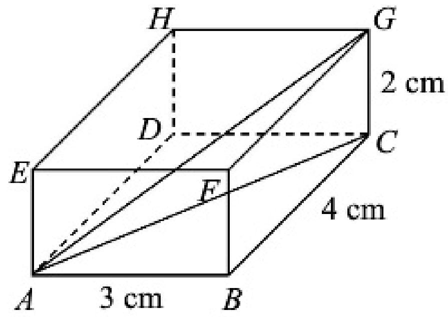


5. 一艘船向北航行 9 km，然后向东航行 17 km，求起点至终点的距离。
6. 一架飞机从 P 地开始向北飞行 70 km，接着向西飞行 x km 至 Q 地。若 P、Q 两地的距离为 120 km，求 x 的值。
7. 已知长方形对角线的长为 12 cm。若长方形的其中一边之长为 10 cm，求此长方形的面积。
8. 一 210 cm 长的梯子靠在墙壁上，梯脚离墙 90 cm，求梯顶离地面的高度。
9. 一菱形的其中一条对角线长 24 cm，若菱形的边长为 13 cm，求另一条对角线的长。

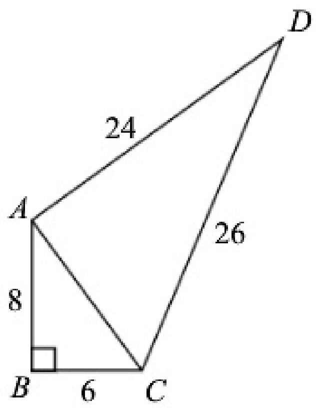
10. 右图所示为一立方体，求 AH 及 AG 的长。



11. 右图所示为一长方体，求 AC 及 AG 的长。



12. 右图中，证明 $\angle CAD$ 是直角。



13. 已知四点 $A(2, 1)$，$B(3, 8)$，$C(-2, -1)$ 及 $D(-7, 4)$，证明 $AB = CD$。

14. 已知三点 $A(5, 0)$，$B(-5, 0)$ 及 $C(3, 4)$，证明 $\angle ACB = 90°$。

15. 一长方形的长为 24 cm，面积为 168 cm^2，求其对角线的长。

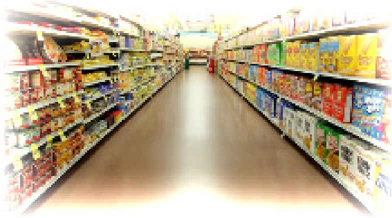
9 集合论

学习目标

- 理解集合与元素的表示法及集合与元素之间的关系
- 理解空集、有限集及基数的概念
- 理解子集的定义及表示法
- 理解等集、相离集的概念
- 掌握联集、交集、差集的定义及运算
- 理解泛集与余集的定义及运算



9.1 集合与元素



在日常生活中，我们常把一些具有某种共同性质的对象放在一起。例如：在超级市场内，货品是按种类摆放。铅笔、原子笔、文件夹等放在文具部，电视机、冰箱、电饭锅等放在电器部，榴梿、山竹、木瓜等放在水果部。

我们将具有某种特性的事物的整体叫做集合，组成集合的每个对象叫做这个集合的元素。例如：

(a) 铅笔、原子笔、文件夹都是文具集合的元素。

(b) 电视机、冰箱、电饭锅都是电器集合的元素。

(c) 榴梿、山竹、木瓜都是水果集合的元素。

(d) 眼睛、耳朵、鼻子是人体器官集合的元素。

(e) 《西游记》、《红楼梦》、《水浒传》、《三国演义》是中国古典小说集合的元素。

(f) 1，2，3，4，5，6 是自然数集合的元素。

(g) 2，3，5，7，11，13，17，19 是质数集合的元素。

一般上我们用大写字母 A，B，C，… 来表示一个集合。

例题 1

集合 A 是由母音字母所组成，求集合 A 的元素。

解： 集合 A 的元素是 a，e，i，o 及 u。

我们用符号“∈”及“∉”表示一个元素与集合之间的关系。若 a 是集合 A 的元素，我们记作 $a \in A$，读作“a 属于 A”；若 b 不是集合 A 的元素，我们记作 $b \notin A$，读作“b 不属于 A”。

例题 2

在下列空格中填入“∈”或“∉”。

(a) 7 ___ $\boldsymbol{N}$　　(b) 100 ___ $\boldsymbol{N}$

(c) $\frac{1}{3}$ ___ $\boldsymbol{N}$　　(d) 0 ___ $\boldsymbol{N}$

解： (a) $7\ \underline{\in}\ \boldsymbol{N}$

(b) $100\ \underline{\in}\ \boldsymbol{N}$

(c) $\frac{1}{3}\ \underline{\notin}\ \boldsymbol{N}$

(d) $0\ \underline{\notin}\ \boldsymbol{N}$

例题 3

在下列空格中填入“∈”或“∉”。

(a) 5 ___ $\boldsymbol{Z}$　　(b) -1 ___ $\boldsymbol{Z}$

(c) $\frac{1}{2}$ ___ $\boldsymbol{Z}$

解： (a) $5\ \underline{\in}\ \boldsymbol{Z}$

(b) $-1\ \underline{\in}\ \boldsymbol{Z}$

(c) $\frac{1}{2}\ \underline{\notin}\ \boldsymbol{Z}$

补充资料

$\boldsymbol{N}$ 表示自然数集合，

$\boldsymbol{W}$ 表示完整数集合，

$\boldsymbol{Z}$ 表示整数集合，

$\boldsymbol{Q}$ 表示有理数集合，

$\boldsymbol{R}$ 表示实数集合。

随堂练习 1

在下列空格内填入“∈”或“∉”。

1. 芒果 ___ 水果集合
2. 31 ___ 质数集合
3. 9 ___ 偶数集合
4. 25 ___ 9 的倍数的集合

练习 9.1a

在下列空格内填入“∈”或“∉”。

1. 马来西亚 ___ 亚洲国家集合
2. 圆规 ___ 几何仪器集合
3. 大红花 ___ 各国国花集合
4. 8 ___ 奇数集合
5. -3 ___ $\boldsymbol{Z}$
6. $\frac{11}{25}$ ___ $\boldsymbol{N}$
7. 0 ___ $\boldsymbol{Z}$
8. 7.5 ___ $\boldsymbol{Q}$
9. 4 ___ 12 的因数集合
10. 0 ___ $\boldsymbol{R}$

集合的表示法

我们用弓括号“{ }”来表示一个集合，可以将集合的所有元素一一列举在弓括号中，元素与元素之间用逗号分开，元素的先后顺序无关紧要，相同或重复的元素只需写一次。例如：

(a) 由 2，4 组成的集合 A 记作 $A=\{2,4\}$ 或 $A=\{4,2\}$；

(b) 由 2，4，6 组成的集合 B 记作 $B=\{2,4,6\}$ 或 $B=\{4,2,6\}$ 等。

另外，我们也可以用集合中元素的共同性质来表示一个集合。例如：

(a) 大于 5 的自然数集合 A，可记作

$A=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，x>5\}$ 或 $A=\{x: x\in \boldsymbol{N}，x>5\}$ 或

$A=\{x\in \boldsymbol{N}，x>5\}$ 或 $A=\{x\in \boldsymbol{N} \mid x>5\}$，读作集合 A 包含所有元素 x 使得 x 属于 $\boldsymbol{N}$ 且 $x>5$。

(b) 所有长方形组成的集合 B，可记作

$B=\{x \mid x\text{是长方形}\}$ 或 $B=\{x: x\text{是长方形}\}$。

注意

集合中的元素如果不能全部列出，可以在列出几个代表元素后再加上“…”表示还有元素没有列入。

例如：

自然数集合 $\boldsymbol{N}$ 可记为

$\boldsymbol{N}=\{1,2,3,4,5,6,\cdots\}$；

由1至100的自然数集合 F 可记为

$F=\{1,2,3,4,5,6,\cdots,99,100\}$；

整数集合 $\boldsymbol{Z}$ 可记为

$\boldsymbol{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\cdots\}$。

例题 4

已知 $X=\{x \mid x\text{是首三个小写字母}\}$

$Y=\{x \mid x\text{是小写母音字母}\}$，

写出 X 与 Y 中所有的元素。

解： $X=\{a,b,c\}$

$Y=\{a,e,i,o,u\}$

随堂练习 2

写出下列各集合的元素：

1. $A=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，x\text{是}9\text{的因数}\}$
2. $B=\{x \mid x\in \boldsymbol{Z}，-3<x<5\}$

练习 9.1b

1. 写出下列各集合的元素：

   (a) $A=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}$，$x$是能被11整除的二位数$\}$

   (b) $B=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}$，$x$是小于20的质数$\}$

   (c) $C=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}$，$x$是数字之和为6的二位数$\}$

   (d) $D=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}$，$x$是数字之积为6的二位数$\}$

   (e) $E=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，3<x<10\}$

   (f) $F=\{x \mid x\in \boldsymbol{Z}，-4\le x\le 5\}$

   (g) $G=\{x \mid x\in \boldsymbol{Z}，x>-10$ 且 $x\le 5\}$

2. 已知 $P=\{x \mid x$是 element 一字的字母$\}$，

   (a) 写出集合 P 的元素；

   (b) 用符号“$\in$”或“$\notin$”表示 e、s 与 P 的关系。

3. 如果 $A=\{x \mid x$是小于5的自然数$\}$，$B=\{3,5,7,9\}$，在下列空格内填上“$\in$”或“$\notin$”：

   (a) 1 ___ A　　(b) 4 ___ A　　(c) 7 ___ A

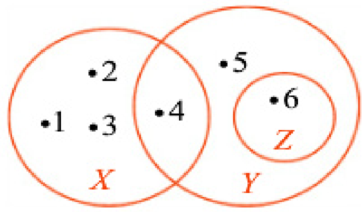
   (d) 2 ___ B　　(e) 15 ___ B　　(f) 10 ___ B

范恩图

用一个封闭区域来表示集合，封闭区域内所考虑的点是该集合的元素，封闭区域外所考虑的点不是该集合的元素，这种表示集合的方法叫做范恩图表示法，它可以让我们直观地了解集合之间的关系。

例题 5

写出右图中集合 X，Y 及 Z 的元素。



解： $X=\{1,2,3,4\}$

$Y=\{4,5,6\}$

$Z=\{6\}$

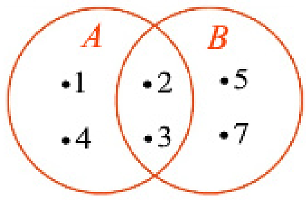
例题 6

用范恩图表示下列集合之间的关系。

$A=\{1,2,3,4\}$

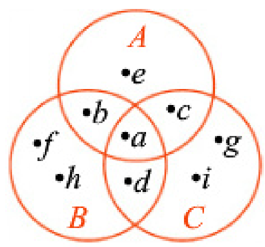
$B=\{x \mid x\text{是小于8的质数}\}$

解：



随堂练习 3

1. 写出右图中集合 A，B 及 C 的元素。



2. 用范恩图表示下列集合之间的关系。

   $P=\{3,6,9,12\}$

   $S=\{x \mid x\text{是小于20的正偶数}\}$

空集

不含任何元素的集合叫做空集，写成ϕ或$\{\ \}$。例如：

(a) 若 $A=\{x\mid x$是能被 2 整除的奇数$\}$

由于没有奇数能被 2 整除，所以 $A=\phi$。

(b) 若 $B=\{x\mid x<3$ 且 $x>5\}$

没有数既小于 3 又大于 5，因此 $B=\phi$。

例题 7

下列哪些是空集？哪些不是空集？

(a) $A=\{x\mid x\in \boldsymbol{N}$，$x$ 是偶数又是质数$\}$

(b) $B=\{x\mid x$ 是超过 31 天的月份$\}$

(c) $C=\{x\mid x$ 是可以被 5 整除的偶数$\}$

(d) $D=\left\{x\mid x\in \boldsymbol{N}，\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\right\}$

解： (a) 由于 2 是偶数又是质数，所以 $2\in A$，因此 A 不是空集。

(b) 没有一个月有超过 31 天，因此 B 是空集。

(c) 10 是偶数又可以被 5 整除，所以 $10\in C$，因此 C 不是空集。

(d) 没有自然数大于 $\frac{1}{4}$ 且小于 $\frac{1}{2}$，因此 D 是空集。

例题 8

$\{0\}$是不是空集?

解: 集合$\{0\}$不是空集，因为它有一个元素0。

例题 9

ϕ和$\{\phi\}$是否一样?

解: ϕ是空集，集合$\{\phi\}$含有一个元素ϕ，所以ϕ和$\{\phi\}$不一样。

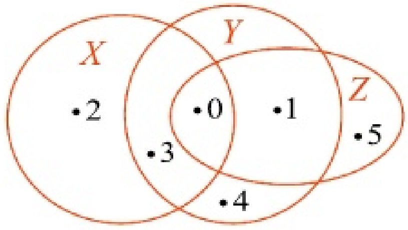
随堂练习 4

下列哪些集合是空集?哪些不是空集?

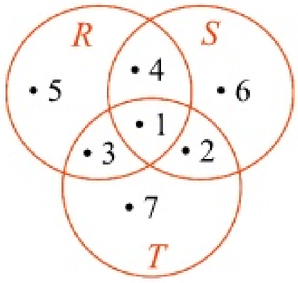
1. $A=\{x \mid x\text{是有五个角的四边形}\}$
2. $B=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，x>5\}$
3. $C=\{x \mid x\in \boldsymbol{R}，x<1\text{且}x>2\}$

练习 9.1c

1. 写出右图的三个集合 X，Y 及 Z 的元素。



2. 右图所示为集合 R，S 及 T 之间的关系。



   (a) 写出集合 R，S，T 的元素。
   (b) 集合 R 及集合 S 有哪些共同的元素？
   (c) 集合 S 及集合 T 有哪些共同的元素？
   (d) 集合 T 及集合 R 有哪些共同的元素？
   (e) 集合 T，集合 R 及集合 S 有哪些共同的元素？

3. 下列哪些集合是空集？哪些不是空集？
   (a) $P=\{x\mid x\text{是“maju”一字的字母}\}$
   (b) $S=\{x\mid x\text{是大于0的负数}\}$
   (c) $T=\{x\mid x\in \boldsymbol{N},\ 0\leq x<1\}$
   (d) $Y=\{x\mid x\in \boldsymbol{N},\ x>9\}$

9.2 有限集与基数

元素可以数得尽的集合叫做有限集，而元素数不尽的集合叫做无限集。例如：英文小写字母的集合有26个元素，因此这个集合是有限集。但自然数有无限多个，因此自然数集合是无限集。$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{Q}$ 及 $\boldsymbol{R}$ 都是无限集。

例题 1

下列集合哪些是有限集？哪些是无限集？若是有限集，说明它有多少个元素。

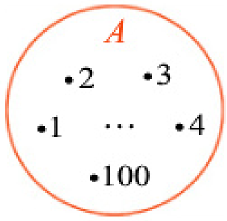
(a) $A=\{x \mid x\in \boldsymbol{N},\ 1\leq x\leq 100\}$

(b) $B=\{x \mid x\text{是正偶数}\}$

解： (a) $A=\{x \mid x\in \boldsymbol{N},\ 1\leq x\leq 100\}$

$=\{1,2,3,4,\cdots,100\}$

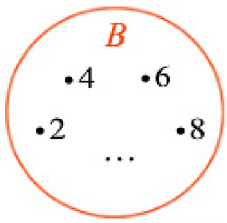
A 是有限集，它有100个元素。



(b) $B=\{x \mid x\text{是正偶数}\}$

$=\{2,4,6,8,\cdots\}$

B 是无限集。



有限集 A 所含元素的个数叫做集合 A 的基数，记作 $n(A)$。如例题 1 中，$n(A)=100$。

例题 2

设 $E=\{x \mid x\in \boldsymbol{N},\ 0<x<100\}$，求 $n(E)$。

解： $E=\{1,2,3,4,\cdots,99\}$ 有 99 个元素，所以 $n(E)=99$。

例题 3

设 $F=\{x \mid x\in\boldsymbol{R}，x<3 \text{ 且 } x>5\}$，求 $n(F)$。

解： 由于没有实数既小于3又大于5，因此 $F=\phi$，$n(F)=0$。

随堂练习 5

下列哪些集合是有限集？哪些是无限集？如果是有限集，写出该集合的基数。

(a) $P=\{x \mid x$ 是“finite”一字的字母$\}$

(b) $Q=\{x \mid x$ 是不能被 2 整除的数$\}$

(c) $R=\{x \mid x\in\boldsymbol{N}，x$ 是 4 的倍数$\}$

练习 9.2

下列哪些集合是有限集？哪些是无限集？如果是有限集，写出该集合的基数。

1. $A=\{10, 20, 30, 40, \cdots, 100\}$
2. $B=\{x \mid x\in\boldsymbol{N}，x$ 是 30 的因数$\}$
3. $C=\{x \mid x\in\boldsymbol{Z}，10<x<20\}$
4. $D=\{x \mid x\in\boldsymbol{N}，5<x<6\}$
5. $E=\{x \mid x\in\boldsymbol{N}，5\leq x\leq 6\}$
6. $F=\{x \mid x\in\boldsymbol{R}，5\leq x\leq 6\}$

9.3 集合间的关系及运算

等集

如果两个集合 A 与 B 拥有完全相同的元素，我们说集合 A 与集合 B 相等，或 A 与 B 是等集，记作 $A=B$。

例如：

(a) 若 $A=\{s,a,m\}$，$B=\{m,a,s\}$，则 $A=B$。

(b) 若 $C=\{t,e,n\}$，$D=\{n,e,t\}$，则 $C=D$。

例题 1

$A=\{x \mid x\text{是小于4的整数}\}$，$B=\{1,2,3,4\}$。判断 A 与 B 是不是等集？

解： $A=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$

$\therefore\ A\neq B$

随堂练习 6

用“=”或“≠”填入下列空格内：

1. $\{\phi\}$ ___ $\{0\}$
2. $\{1,2,3,4\}$ ___ $B=\{x \mid x\text{是小于5的自然数}\}$

子集

观察以下例子：

A 是水果集合，$B=\{$榴梿，红毛丹，山竹，木瓜，西瓜$\}$。我们发现集合 B 里的每一个元素都属于集合 A，我们说 B 是 A 的子集。

设有两个集合 A 与 B，如果集合 B 的所有元素都属于集合 A，那么 B 是 A 的子集，记作 $B\subseteq A$，读作 B 是 A 的子集或 B 包含于 A 或 A 包含 B。

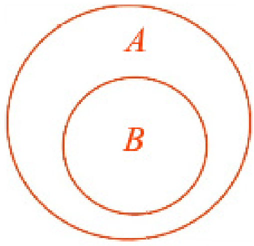


图 9-1

空集 ϕ 是任何集合 A 的子集，即 $\phi\subseteq A$。集合 A 也是它本身的一个子集，即 $A\subseteq A$。若集合 B 是集合 A 的子集，但 $B\neq A$，我们说 B 是 A 的真子集，记作 $B\subset A$。例如：

(a) $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$，A 的所有元素都属于 B，$A\subseteq B$，B 有元素不属于 A，$A\subset B$。

(b) $C=\{2,4,6,8,\cdots\}$，$D=\{2,4,6,8,\cdots\}$，则 $C\subseteq D$ 且 $D\subseteq C$。

(c) $E=\{x\mid x\text{ 是正奇数}\}$，$F=\{1,3,5,7,\cdots\}$，则 $E\subseteq F$ 且 $F\subseteq E$。

数的集合之间有以下的关系，$\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{W}\subset\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$。

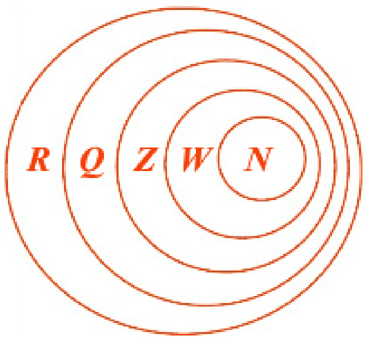


图 9-2

注意

如果集合 B 中存有一个元素不属于集合 A，集合 B 就不是集合 A 的子集，记作 $B\not\subset A$。

例题 2

设 $E=\{m,e,n\}$，判断下列各式是对的或错的。

(a) $m \in E$

(b) $m \subseteq E$

(c) $\{m\} \in E$

(d) $\{m\} \subseteq E$

解： (a) 对，因为 m 是集合 E 的元素。

(b) 错，因为 m 是集合 E 的元素，不是 E 的一个子集。

(c) 错，因为 $\{m\}$ 是 E 的一个子集，不是 E 的一个元素。

(d) 对，因为 $\{m\}$ 是 E 的一个子集。

一个有限集合有多少个子集呢?

例题 3

设 $A=\{a\}$，列出 A 的所有子集。

解： A 的子集有 ϕ 及 $\{a\}$。

例题 4

设 $B=\{a,b\}$，列出 B 的所有子集。

解： B 的子集有 ϕ，$\{a\}$，$\{b\}$ 及 $\{a,b\}$。

例题 5

设 $C=\{a,b,c\}$，列出 C 的所有子集。

解： C 的子集有 ϕ，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{b,c\}$，$\{a,c\}$ 及 $\{a,b,c\}$。

由例题 3 至例题 5，我们看出
含有 1 个元素的集合有 2 个子集，
含有 2 个元素的集合有 $4=2^2$ 个子集，
含有 3 个元素的集合有 $8=2^3$ 个子集，
由此可推论出

> 含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集。

例题 6

集合 $P=\{1,3,5,7,9\}$ 有多少个子集？

解： 因为集合 P 有 5 个元素，所以有 $2^5=32$ 个子集。

随堂练习 7

1. 判断下列各式是对的或错的。

   (a) $a\in\{a,b\}$　　(b) $a\subseteq\{a,b\}$

   (c) $\{a\}\in\{a,b\}$　　(d) $\{a\}\subseteq\{a,b\}$

   (e) $\phi\in\{a,b\}$　　(f) $\phi\subseteq\{a,b\}$

2. 写出集合 $P=\{1,2,3,4\}$ 的所有子集。

3. 集合 $Q=\{x\mid x$ 是小于 7 的正偶数$\}$ 有多少个子集?

相离集

观察图9-3的两个集合，它们完全没有共同的元素，我们说 A 与 B 是相离集。

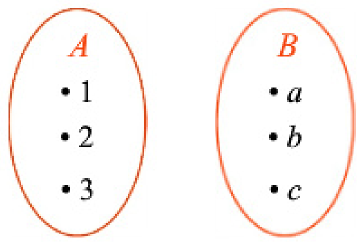


图 9-3

例题 7

在下列各题中，判断集合 A 与集合 B 是不是相离集。

(a) A 是正奇数集合，B 是正偶数集合。

(b) $A=\{x\mid x$ 是质数$\}$，$B=\{x\mid x$ 是正偶数$\}$。

解： (a) 没有任何数既是奇数又是偶数，所以 A 与 B 是相离集。

(b) 2 既是质数又是偶数，所以 A 与 B 有共同的元素 2。

$\therefore$ A 与 B 不是相离集。

随堂练习 8

判断以下两个集合是不是相离集。

$C=\{x \mid x>100\}$，$D=\{x \mid x<100\}$

练习 9.3a

1. 判断下列各题是对的或错的：
   (a) $\{2,3\}\subseteq\{2,3,4\}$
   (b) $\{2,3,4\}\subseteq\{2,3\}$
   (c) $\{a,b,c\}\subseteq\{a,b,c\}$
   (d) $\{0\}\subseteq\{0,100\}$
   (e) $\{x,y\}$有4个子集
   (f) $\phi\subseteq\{a,b,c\}$
2. 设 $A=\{s,e,t\}$，$B=\{e,t,s\}$，问 A 是不是 B 的子集？B 是不是 A 的子集？
3. 集合 $Y=\{a,b,c,d,e,f\}$ 有多少个子集？
4. 用范恩图表示下列三个集合之间的关系：
   $E=\{1,3\}$
   $F=\{1,2,3,6\}$
   $G=\{1,2,3,4,6,12\}$
5. 用“=”或“≠”填入下列空格内：
   (a) 正整数集合 ___ 自然数集合
   (b) 整数集合 ___ 完整数集合
   (c) $\{x \mid x\in \boldsymbol{N},\ 1<x<100\}$ ___ $\{x \mid x\in \boldsymbol{Z},\ 2\le x\le 99\}$
6. 用范恩图表示下列集合间的关系：
   (a) $A\subset B$，$B\subset C$，$C=D$
   (b) $A\neq B$ 且 $A\not\subset B$ （提示：有三种可能）

联集

设 A 与 B 是两个集合，由属于 A 或属于 B 的所有元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的联集，读作 A 联 B，记作 $A \cup B$。

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

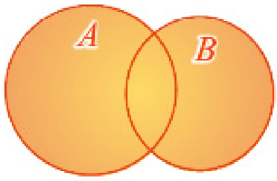
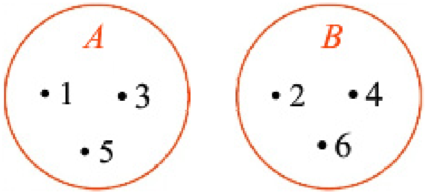


图 9-4

例题 8

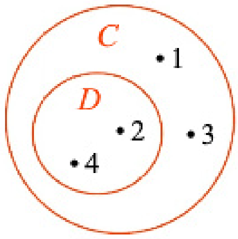
设 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，求 $A \cup B$。



解： $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$

例题 9

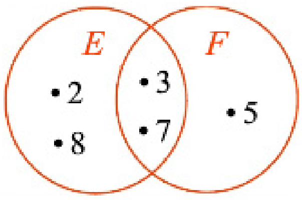
设 $C=\{1,2,3,4\}$，$D=\{2,4\}$，求 $C \cup D$。



解： $C \cup D=\{1,2,3,4\}$

例题 10

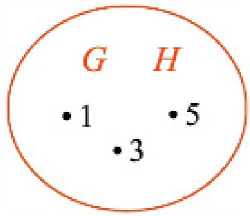
设 $E=\{2,3,7,8\}$，$F=\{3,5,7\}$，求 $E \cup F$。



解： $E \cup F=\{2,3,5,7,8\}$

例题 11

设 $G=\{1,3,5\}$，$H=\{1,3,5\}$，求$G\cup H$。



解： $G\cup H=\{1,3,5\}$

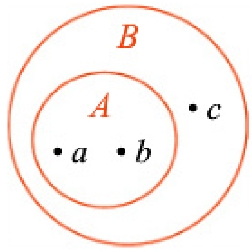
例题 12

设 $A=\{a,b\}$，$B=\{a,b,c\}$，求

(a) $A\cup A$

(b) $A\cup\phi$

(c) $A\cup B$



解： (a) $A\cup A=\{a,b\}=A$

(b) $A\cup\phi=\{a,b\}=A$

(c) $A\cup B=\{a,b,c\}=B$

由例题12可以看出

- $A\cup A=A$
- $A\cup\phi=A=\phi\cup A$
- 若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$

联集的基本性质

(一) 交换律

对于任何集合 A 与 B，$A\cup B=B\cup A$。

(二) 结合律

对于任何集合 A，B 与 C，

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$。

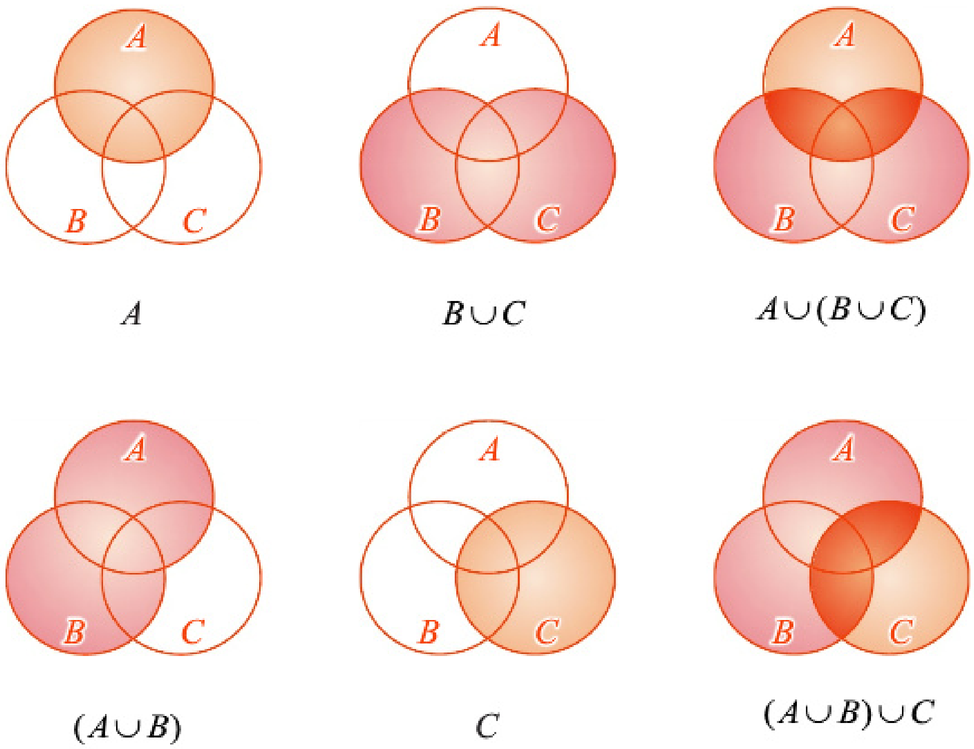


图 9-5

注意

∵ $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

∴ $A\cup(B\cup C)$ 与 $(A\cup B)\cup C$ 可写成 $A\cup B\cup C$。

例题 13

设 $A=\{x \mid x\in \mathbf{N},\ 3<x<5\}$，$B=\{x \mid x\in \mathbf{N},\ 4\le x\le 7\}$，求 $A\cup B$。

解： $A=\{4\}$，$B=\{4,5,6,7\}$

$\therefore\ A\cup B=\{4,5,6,7\}$

例题 14

设 $C=\{x \mid x$ 是小于15的正偶数$\}$，

$D=\{x \mid x$ 是3的倍数，$0<x<17\}$，

求 $n(C\cup D)$。

解： $C=\{2,4,6,8,10,12,14\}$

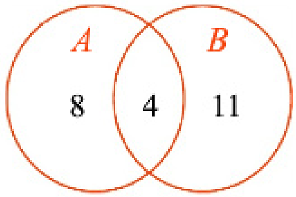
$D=\{3,6,9,12,15\}$

$C\cup D=\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15\}$

$\therefore\ n(C\cup D)=10$

例题 15

右图中各区域内的数表示该区域所含有的元素数量，求 $n(A)$，$n(B)$ 及 $n(A\cup B)$。



解： $n(A)=8+4=12$

$n(B)=4+11=15$

$n(A\cup B)=8+4+11=23$

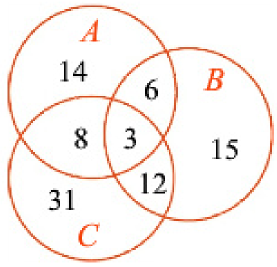
随堂练习 9

设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{3,4,5\}$，求

(a) $B\cup C$　　　(b) $A\cup B\cup C$

练习 9.3b

1. 在下列各题中，以范恩图表示两个集合的关系，并求 $A\cup B$。
   (a) $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{5,7,9,11\}$
   (b) $A=\{1,2,4,8\}$，$B=\{8,4,2,1\}$
   (c) $A=\{2,4,8\}$，$B=\{2,4,6,8,10\}$
   (d) $A=\{a,b,c\}$，$B=\{d,e,f\}$
2. 右图中各区域内的数表示该区域所含有的元素数量，求



   (a) $n(A)$　　(b) $n(B)$
   (c) $n(C)$　　(d) $n(A\cup B)$
   (e) $n(B\cup C)$　　(f) $n(A\cup C)$
   (g) $n(A\cup B\cup C)$
3. 已知 $S=\{x\mid x\in \boldsymbol{N},\ 1\le x\le 5\}$，$R=\{x\mid x\in \boldsymbol{N},\ 2\le x\le 6\}$，求 $S\cup R$ 及 $n(S\cup R)$。
4. 已知 $P=\{x\mid x\in \boldsymbol{N},\ x\text{是}12\text{的因数}\}$，$Q=\{x\mid x\in \boldsymbol{N},\ x\text{是}9\text{的因数}\}$，
   (a) 写出集合 P 与集合 Q 的元素，并画一范恩图表示它们之间的关系。
   (b) 求 $P\cup Q$ 及 $n(P\cup Q)$。

交集

设 A 与 B 是两个集合，由同时属于 A 与 B 的所有元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，读作 A 交 B，记作 $A\cap B$。

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\ \text{且}\ x\in B\}$$

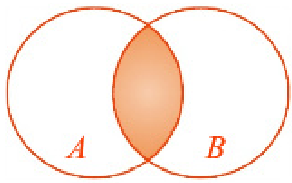
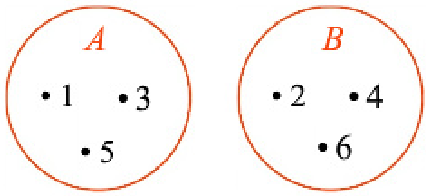


图 9-6

例题 16

设 $A=\{1,3,5\}$， $B=\{2,4,6\}$，求 $A\cap B$。

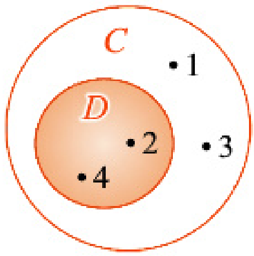
解： $A\cap B=\phi$



例题 17

设 $C=\{1,2,3,4\}$， $D=\{2,4\}$，求 $C\cap D$。

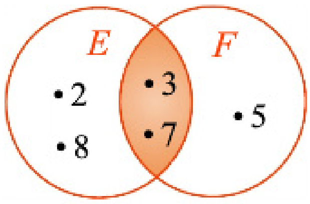
解： $C\cap D=\{2,4\}$



例题 18

设 $E=\{2,3,7,8\}$， $F=\{3,5,7\}$，求 $E\cap F$。

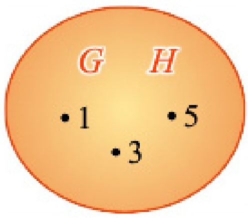
解： $E\cap F=\{3,7\}$



例题 19

设 $G=\{1,3,5\}$， $H=\{1,3,5\}$，求 $G\cap H$。

解： $G\cap H=\{1,3,5\}$



例题 20

设 $A=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，x 是 12 的因数\}$，

$B=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，x 是 9 的因数\}$，求 $A\cap B$。

解： $A=\{1,2,3,4,6,12\}$， $B=\{1,3,9\}$

$\therefore\ A\cap B=\{1,3\}$

例题 21

设 $A=\{a,b\}$， $B=\{a,b,c\}$，求

(a) $A\cap A$

(b) $A\cap\phi$

(c) $A\cap B$

解： (a) $A\cap A=\{a,b\}=A$

(b) $A\cap\phi=\phi$

(c) $A\cap B=\{a,b\}=A$

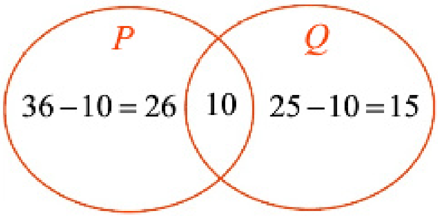
由例题 21 可以看出

- $A\cap A=A$
- $A\cap\phi=\phi=\phi\cap A$
- 若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$

例题 22

若 $n(P)=36$， $n(Q)=25$， $n(P\cap Q)=10$， 用范恩图求 $n(P\cup Q)$。

解：



由范恩图， $n(P\cup Q)=26+10+15$

$=51$

交集的基本性质

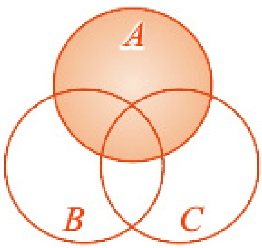
(一) 交换律

对于任何集合 A 与 B， $A\cap B=B\cap A$。

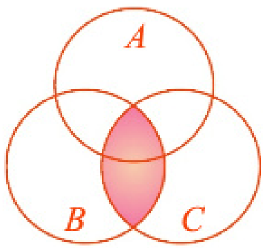
(二) 结合律

对于任何集合 A，B 与 C，

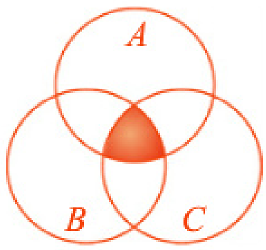
$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ 。



A



$B\cap C$



$A\cap(B\cap C)$

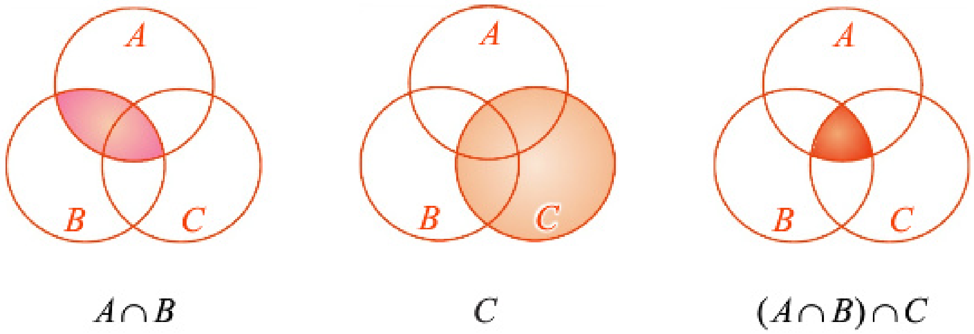


图 9-7

注意

∵ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

∴ $A\cap(B\cap C)$ 与 $(A\cap B)\cap C$ 可写成 $A\cap B\cap C$ 。

交集与联集的分配律

对于任何集合 A，B 与 C，

(a) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

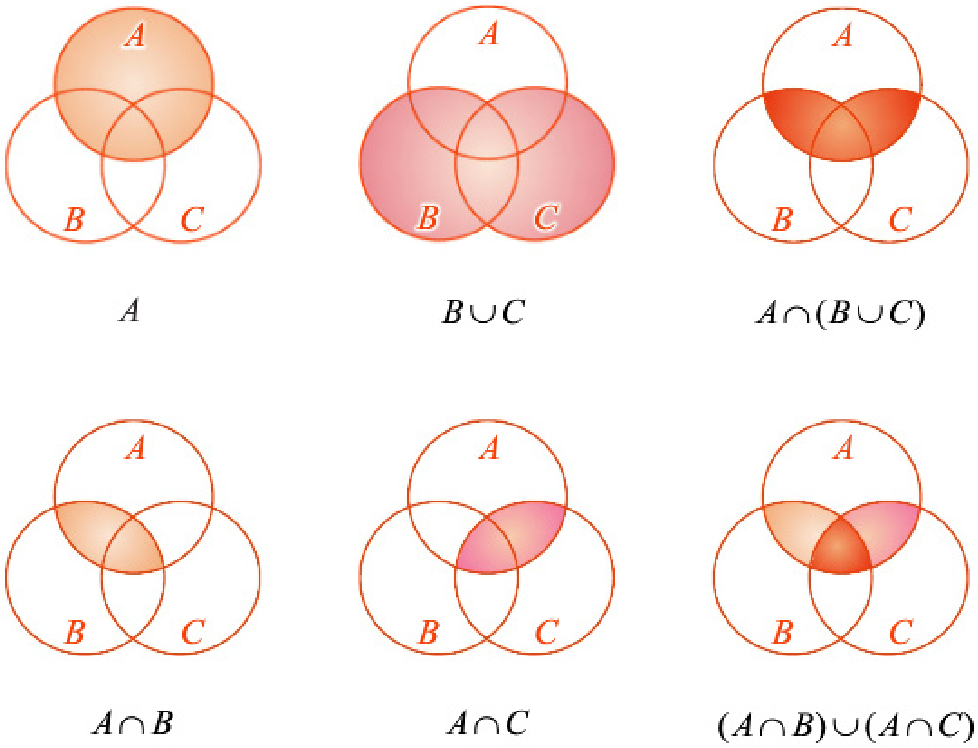
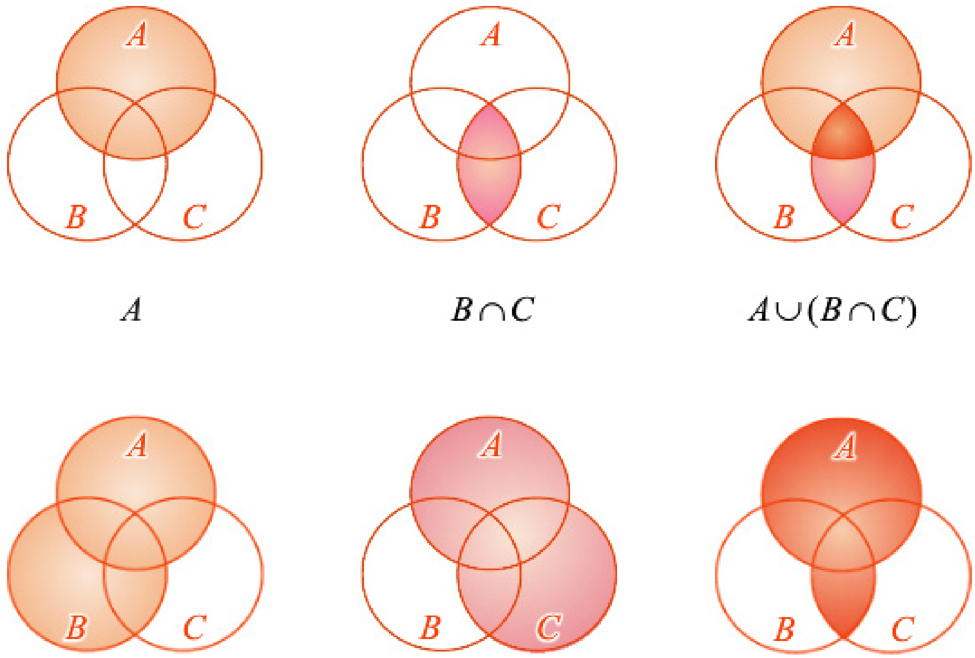


图 9-8

(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



A　　$B \cap C$　　$A \cup (B \cap C)$

$A \cup B$　　$A \cup C$　　$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

图 9-9

随堂练习 10

设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B = \{2, 4, 6\}$，$C = \{3, 4, 5\}$，求

(a) $A \cap B$

(b) $B \cap C$

(c) $A \cap C$

(d) $A \cap B \cap C$

(e) $(A \cap B) \cup C$

(f) $A \cap (B \cup C)$

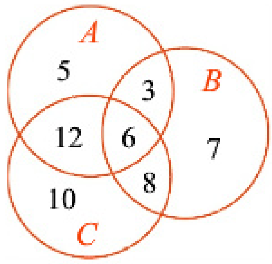
练习 9.3c

1. 下列各题中，求 $A\cap B$，并以范恩图表示两个集合的关系。

   (a) $A=\{1,3,5,7\}$， $B=\{5,7,9,11\}$

   (b) $A=\{2,4,8\}$， $B=\{2,4,6,8,10\}$

2. 右图中各区域内的数表示该区域所含有的元素数量，求



   (a) $n(A)$　　(b) $n(B)$

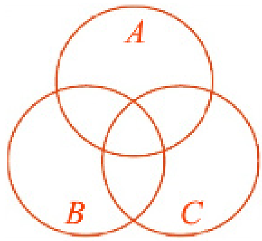
   (c) $n(A\cap B)$　　(d) $n(B\cup C)$

   (e) $n(A\cap B\cap C)$　　(f) $n[(A\cap B)\cup C]$

3. 设 X 是奇数集合，Y 是偶数集合，求 $n(X\cap Y)$。

4. 设 $A=\{x\mid x$ 是 3 的倍数，$1<x<25\}$， $B=\{x\mid x$ 是 6 的倍数，$1<x<25\}$，求 $A\cup B$ 及 $A\cap B$。

5. 下列各小题中，重画右图并以阴影表示各题中的集合。



   (a) $A\cup(B\cap C)$

   (b) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$

6. 用范恩图表示下列各题中集合之间的关系：

   (a) $A\subseteq B$， $C\subseteq B$， $A\cap C=\phi$

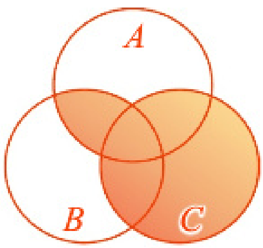
   (b) $A\subseteq B$， $A\neq C$， $B\cap C=\phi$

   (c) $B\subset C$， $A\neq B$， $A\subseteq(B\cap C)$

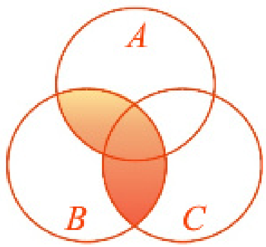
   (d) $A\subseteq B$， $B\cap C\neq\phi$， $A\cap C=\phi$， $C\not\subset B$

7. 用联集或交集表示下列各图中的着色部分。

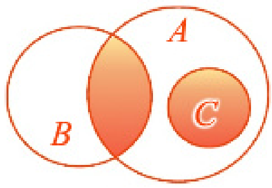
(a)



(b)



(c)



8. 应用范恩图解下列各题：

   (a) $n(A)=50$， $n(B)=62$， $n(A\cap B)=26$，求 $n(A\cup B)$。

   (b) $n(P)=23$， $n(Q)=25$， $P\subset Q$，求 $n(P\cup Q)$。

差集

设 A 与 B 是两个集合，由属于 A 但不属于 B 的所有元素所组成的集合，叫做从 A 减去 B 的差集，记作 $A\setminus B$，读作 A 减 B。

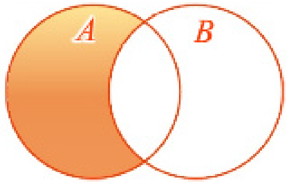


图9-10

注意

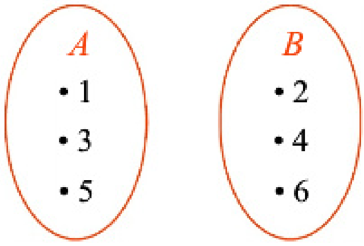
若 $A\neq B$，
则 $A\setminus B\neq B\setminus A$。

例题23

设 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，求 $A\setminus B$ 与 $B\setminus A$。

解： $A\setminus B=\{1,3,5\}$

$B\setminus A=\{2,4,6\}$

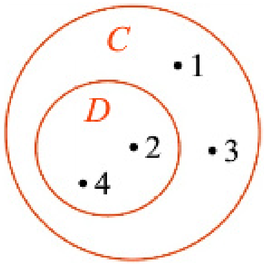


例题24

设 $C=\{1,2,3,4\}$，$D=\{2,4\}$，求 $C\setminus D$ 与 $D\setminus C$。

解： $C\setminus D=\{1,3\}$

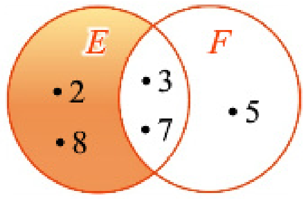
$D\setminus C=\phi$



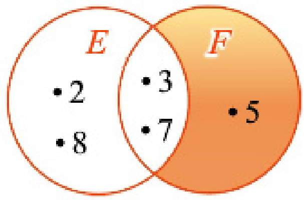
例题 25

设 $E=\{2,3,7,8\}$，$F=\{3,5,7\}$，求 $E\setminus F$ 与 $F\setminus E$。

解： $E\setminus F=\{2,8\}$

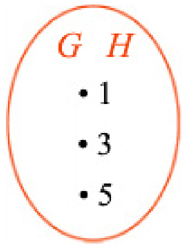


$F\setminus E=\{5\}$



例题 26

设 $G=\{1,3,5\}$，$H=\{1,3,5\}$，求 $G\setminus H$ 与 $H\setminus G$。



解： $G\setminus H=H\setminus G=\phi$

例题 27

设 $A=\{x\mid x$ 是小于10的质数$\}$，$B=\{x\mid x$ 是小于10的正奇数$\}$，求 $A\setminus B$ 及 $B\setminus A$。

解： $A=\{2,3,5,7\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$

$A\setminus B=\{2\}$

$B\setminus A=\{1,9\}$

例题 28

设 $A=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，3<x\leq 7\}$，$B=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，7\leq x<10\}$，

求 $n(A\setminus B)$。

解： $A=\{4,5,6,7\}$，$B=\{7,8,9\}$

$A\setminus B=\{4,5,6\}$

$\therefore\ n(A\setminus B)=3$

随堂练习 11

设 $A=\{1,5\}$，$B=\{1,3,5,7\}$，求 $A\setminus B$，并以范恩图表示 $A\setminus B$。

练习 9.3d

1. 设 $A=\{a,e,i,o,u\}$，$B=\{a,i,o\}$，$C=\{a,b,c\}$，求

   (a) $A\setminus B$　(b) $B\setminus A$　(c) $A\setminus C$　(d) $C\setminus B$

2. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{3,4,5\}$，

   (a) 求 $(A\setminus B)\setminus C$ 及 $A\setminus(B\setminus C)$。

   (b) $(A\setminus B)\setminus C$ 与 $A\setminus(B\setminus C)$ 相等吗?

3. 设 X 是质数集合，Y 是正奇数集合，求 $n(X\setminus Y)$。

4. 设 $A=\{x \mid x$ 是 12 的因数，$1<x<25\}$，$B=\{x \mid x$ 是 18 的因数，$1<x<25\}$，求 $A\setminus B$ 及 $n(A\setminus B)$。

5. 已知 $S=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，1\leq x\leq 5\}$，$R=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，2\leq x\leq 6\}$，求 $S\setminus R$ 及 $n(S\setminus R)$。

9.4 泛集与余集

泛集

在集合论中，我们会假设所讨论的集合都是某一个给定集合的子集，那么这个给定的集合就叫做泛集，记作ξ。泛集的范恩图是用长方形区域来表示。例如：若我们所讨论的集合是篮球校队队员的集合，戴眼镜同学的集合，华乐团团员的集合，那么，我们就取泛集为所有学生的集合。当泛集给定时，其他所讨论的集合就被预设为该泛集的子集。



图9-11

例题 1

用范恩图来表示下列各集合之间的关系，其中ξ是泛集。

$\xi=\{x \mid x\in N,\ 15\le x\le 21\}$

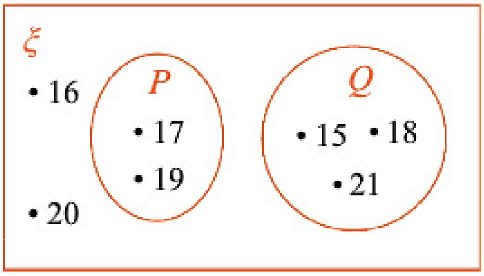
$P=\{x \mid x$是质数$\}$

$Q=\{x \mid x$是3的倍数$\}$

解： $\xi=\{15,16,17,18,19,20,21\}$

$P=\{17,19\}$

$Q=\{15,18,21\}$



余集

如果ξ是泛集，A是ξ的一个子集，由属于ξ但不属于A的所有元素所组成的集合叫做集合A的余集，记作A'或A^c。

$$\begin{aligned} A' &= \xi \setminus A \\ &= \{x \mid x \in \xi \text{ 但 } x \notin A\} \end{aligned}$$

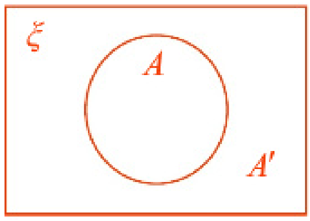


图9-12

例题 2

设$\xi = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A = \{0,1,2,3,4,5\}$，求$A'$。

解： $A' = \{6,7,8,9\}$

例题 3

设 $\xi = \{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ 1 \le x \le 10\}$，$A = \{x \mid x \in \boldsymbol{N},\ 5 < x < 8\}$，求$A'$。

解： $\xi = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A = \{6,7\}$

$\therefore\ A' = \{1,2,3,4,5,8,9,10\}$

例题 4

如果泛集为 N，A 是奇数集合，求 A'。

解： A' 是偶数集合。

例题 5

设 $\xi=\{x \mid x$ 是自然数且 $1 \leq x \leq 10\}$

$A=\{x \mid x$ 是 2 的倍数$\}$

$B=\{x \mid x$ 是 3 的倍数$\}$

$C=\{x \mid x$ 是 5 的倍数$\}$

(a) 写出 ξ，A，B 及 C 的元素，并以范恩图表示它们之间的关系。

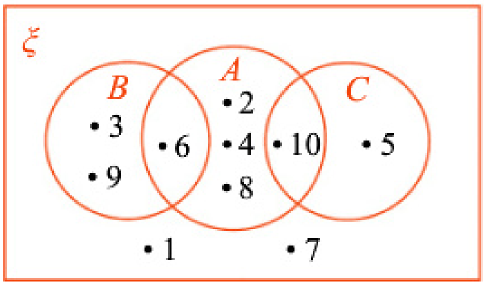
(b) 求 A'，$(A \cap B)'$ 及 $(A \cup B \cup C)'$。

解： (a) $\xi=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A=\{2,4,6,8,10\}$

$B=\{3,6,9\}$

$C=\{5,10\}$



(b) $A'=\{1,3,5,7,9\}$

$(A \cap B)'=\{1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$

$(A \cup B \cup C)'=\{1,7\}$

- $A \cup A' = \xi$
- $A \cap A' = \phi$
- $(A')' = A$
- $\xi' = \phi$
- $\phi' = \xi$

随堂练习 12

设 $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$， $A = \{1, 3, 6, 9\}$， $B = \{2, 5, 7, 9, 10\}$，求

(a) A'　　(b) B'　　(c) $(A \cap B)'$

(d) $(A \cup B)'$　　(e) $(A \setminus B)'$

练习 9.4

1. 已知 $\xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$，

$A = \{1, 3, 7, 9\}$，

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$，

$C = \{1, 5, 10\}$。

求 (a) $A \cup B'$　　(b) $(A \cap C)'$　　(c) $(A \setminus B)'$

(d) $(A \cup B \cup C)'$　　(e) $A \cap B' \cap C$　　(f) $(A \cup B)' \cap C$

2. 设$\xi=\{x \mid 1\le x\le 20$ 且 x 是自然数$\}$

$A=\{x \mid x$ 是质数$\}$

$B=\{x \mid x$ 是偶数$\}$

(a) 写出ξ，A及B的元素，并以范恩图表示它们之间的关系。

(b) 求A'，$(A\cap B)'$及$(A\cup B)'$。

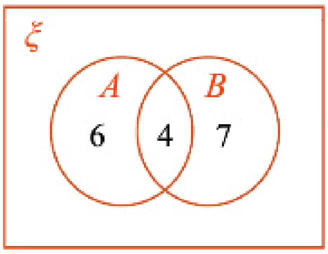
3. 右图中，各区域内的数表示该区域所含有的元素数量。

如果$n(\xi)=20$，求

(a) $n(A')$

(b) $n((A\cup B)')$

(c) $n(A'\cap B')$



4. 右图中，各区域内的数表示该区域所含有的元素数量。

如果$n(\xi)=50$，求

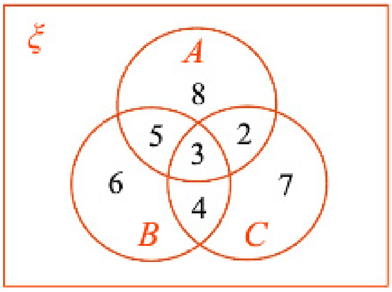
(a) $n(A')$

(b) $n((A\cup B)')$

(c) $n(A'\cap B')$

(d) $n((A\cup B\cup C)')$

(e) $n((A\cap B)\cup C')$



总复习题9

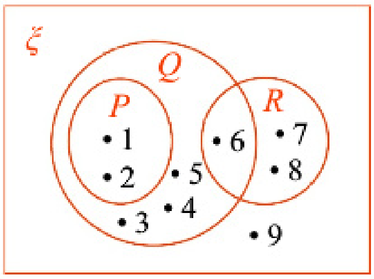
1. 已知$\xi=\{x \mid x 是质数\}$

$$A=\{x \mid 10<x<42\}$$

$$B=\{x \mid 10\le x\le 60\}$$

求$n(A\cup B)$，$n(A\cap B)$及$n(A\setminus B)$ 。

2. 如右图所示，求



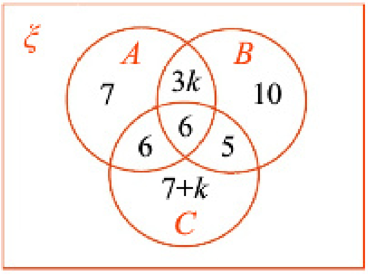
(a) $P\cap Q\cap R$

(b) $(P\cup Q)'$

(c) $(P\cup R)'\cap Q$

3. 设$M=\{x \mid x\in \boldsymbol{N}，x 是102的质因数\}$，问$M$有多少个子集?

4. 右图中，各区域内的数表示该区域所含有的元素数量。



已知$n(\xi)=100$，$n(C)=n(A\cap B)$，求

(a) k的值;

(b) $n(A'\cup C)$

5. 设$\xi=\{x \mid x\in \boldsymbol{Z}，2\le x\le 10\}$，其子集$A=\{x \mid x 是质数\}$，$B=\{x \mid x 是36的因数\}$及$C=\{x \mid x 是奇数\}$。

(a) 写出集合A，B及C的元素;

(b) 求$A\cap B\cap C$;

(c) 求$n((A\cup B\cup C)')$。

6. 已知$P=\left\{x \mid x\in \boldsymbol{R}，\frac{1}{8}<x\le\frac{3}{4}\right\}$，$Q=\left\{\frac{1}{8},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$，求$P\cap Q$。

7. 设 $\xi=\{x \mid x\in \boldsymbol{N},\ 30\leq x\leq 45\}$，

$A=\{x \mid x$ 是数字之和为8的数$\}$，

$B=\{x \mid x$ 是奇数且数字之和大于8$\}$，

$C=\{x \mid x$ 是11的倍数$\}$。

(a) 写出集合ξ，A，B及C的元素，并以范恩图表示各集合之间的关系；

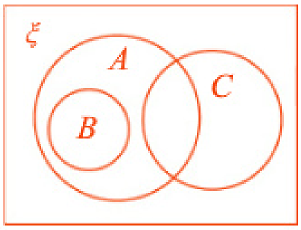
(b) 求$n(A\cap C)$；

(c) 求$n((A\cup B\cup C)')$。

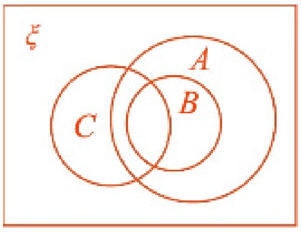
8. 若$A\cap B\neq\phi$，$C\subset B$，$A\cap C=\phi$，用范恩图表示集合A，B及C的关系。

9. 重画下列各图，并以阴影表示下列集合。

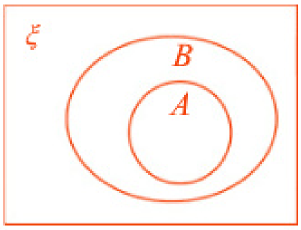
(a) $C\cap B'\cap A$



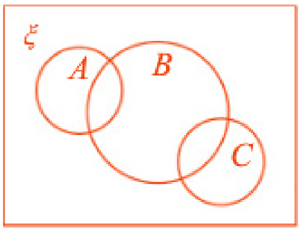
(b) $C\cap(A\cap B)$



(c) $B\cup A'$



(d) $A'\cap C'\cap B$



10 集合论的应用

学习目标

- 掌握两个或三个集合联集的基数公式及其应用
- 掌握余集的基数公式及其应用
- 能应用范恩图法解题



10.1 两个集合联集的基数公式及其应用

在前一章，我们学过有限集与基数，若A是有限集，$n(A)$表示它的基数。在这一章，所提到的集合都是有限集。

设A，B为两个集合，且$n(A)=p$，$n(B)=q$，$n(A\cap B)=x$，则可画出以下的范恩图来表示其基数的关系：

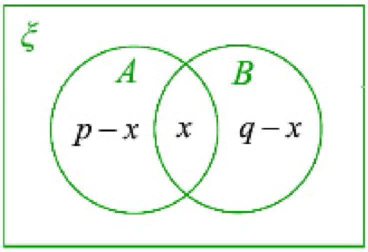


图 10-1

从图 10-1 可得出

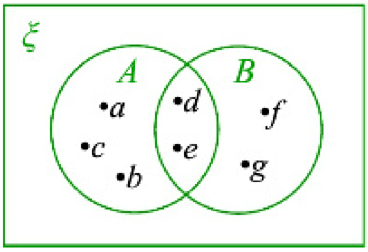
$$
\begin{aligned}
n(A\cup B) &= (p-x)+(q-x)+x \\
&= p+q-x \\
&= n(A)+n(B)-n(A\cap B)
\end{aligned}
$$

所以我们可以得出以下结果：

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

例题 1

设 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{d,e,f,g\}$，验证 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。



解： $A\cap B=\{d,e\}$

$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

$\because\ n(A)=5$

$n(B)=4$

$n(A\cap B)=2$

$n(A\cup B)=7$

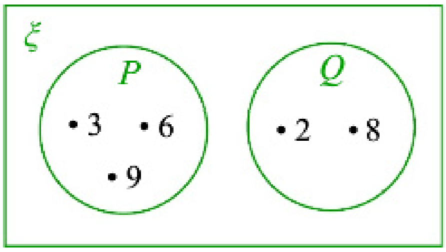
$\therefore\ n(A)+n(B)-n(A\cap B)=5+4-2$

$=7$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

例题 2

设 $P=\{3,6,9\}$，$Q=\{2,8\}$，验证 $n(P\cup Q)=n(P)+n(Q)-n(P\cap Q)$。



解： $P\cap Q=\phi$

$P\cup Q=\{2,3,6,8,9\}$

$n(P)=3$

$n(Q)=2$

$n(P\cap Q)=0$

$n(P\cup Q)=5$

$\therefore\ n(P)+n(Q)-n(P\cap Q)=3+2-0$

$=5$

$\therefore\ n(P\cup Q)=n(P)+n(Q)-n(P\cap Q)$

补充资料

当两个集合是相离集时，即 $P\cap Q=\phi$，其交集的基数为0，即 $n(P\cap Q)=0$，可得 $n(P\cup Q)=n(P)+n(Q)$。

例题 3

设 $A=\{2,3\}$，$B=\{2,3,5,7,8\}$，验证
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。

解： $A\cap B=\{2,3\}$

$A\cup B=\{2,3,5,7,8\}$

$\because\ n(A)=2$

$n(B)=5$

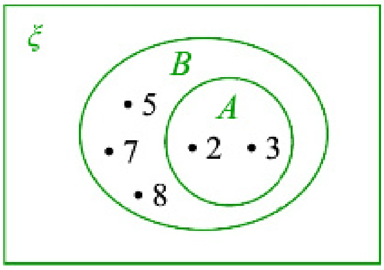
$n(A\cap B)=2$

$\therefore\ n(A)+n(B)-n(A\cap B)=2+5-2$

$=5$

$n(A\cup B)=5$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$



补充资料

当 $A\subseteq B$ 时，$A\cap B=A$，$A\cup B=B$

$\therefore\ n(A\cap B)=n(A)$

$n(A\cup B)=n(B)$

$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

例题 4

设 $n(A)=25$，$n(B)=38$，依下列各种条件，求 $n(A\cup B)$。

(a) $n(A\cap B)=16$；

(b) A 与 B 是相离集；

(c) $A\subset B$。

解： (a) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=25+38-16$

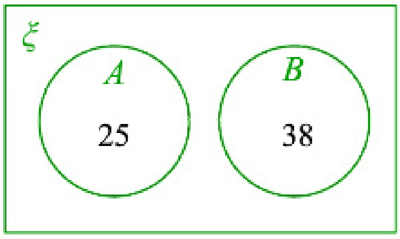
$=47$

(b) $\because\ A\cap B=\phi$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

$=25+38$

$=63$

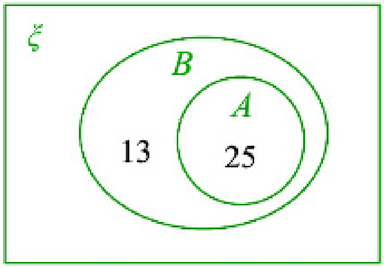


(c) $\because\ A\subset B$

$\therefore\ A\cup B=B$

$\therefore\ n(A\cup B)=n(B)$

$=38$



随堂练习 1

1. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$， $B=\{2,4,6,8\}$，验证 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。
2. 设 $n(A)=24$， $n(B)=18$， $n(A\cap B)=12$，求 $n(A\cup B)$。

练习 10.1a

1. 若 $n(A)=51$， $n(B)=63$， $n(A\cap B)=26$，求 $n(A\cup B)$。
2. 若 $n(X)=8$， $n(Y)=12$，集合 X 与 Y 是相离集，求 $n(X\cup Y)$。
3. 若 $n(P)=22$， $n(Q)=25$，且 $P\subset Q$，求 $n(P\cup Q)$。
4. 若 $n(A)=8$， $n(B)=15$，求 $n(A\cup B)$ 的最大可能值与最小可能值。
5. 若 $n(A)=10$， $n(B)=16$，求 $n(A\cap B)$ 的最大可能值与最小可能值。

例题 5

某班 42 名学生都有参与踢足球或打羽球的活动。若踢足球的学生有 25 名，打羽球的学生有 21 名，问两种球类活动都有参与的学生有几名？

解一： 设 F 是踢足球的学生集合

B 是打羽球的学生集合

$F\cup B$ 是全班学生的集合

$F\cap B$ 是参与两种球类活动的学生集合

已知 $n(F)=25$，$n(B)=21$，$n(F\cup B)=42$

$$n(F\cup B)=n(F)+n(B)-n(F\cap B)$$
$$42=25+21-n(F\cap B)$$
$$n(F\cap B)=25+21-42$$
$$=4$$

∴ 两种球类活动都有参与的学生有 4 名。

解二： 设 F 是踢足球的学生集合

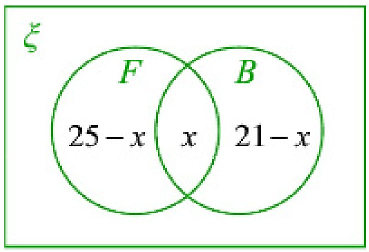
B 是打羽球的学生集合

x 为参与两种球类活动的学生人数

由范恩图得 $(25-x)+x+(21-x)=42$

$$x=4$$

∴ 两种球类活动都有参与的学生有 4 名。



例题 6

某工厂的工人都喝咖啡或茶，其中 48 人喝咖啡，52 人喝茶，25 人喝咖啡及茶，问该工厂共有多少名工人？

解一： 设 $C=\{x \mid x\text{ 是喝咖啡的工人}\}$

$T=\{x \mid x\text{ 是喝茶的工人}\}$

$C\cup T$ 是全体工人的集合

$C\cap T$ 是喝咖啡及茶的工人的集合

已知 $n(C)=48$，$n(T)=52$，$n(C\cap T)=25$

$$
\begin{aligned}
n(C\cup T) &= n(C)+n(T)-n(C\cap T)\\
&= 48+52-25\\
&= 75
\end{aligned}
$$

∴ 该工厂共有 75 名工人。

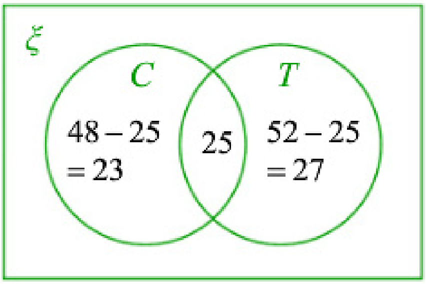
解二： 设 $C=\{x \mid x\text{ 是喝咖啡的工人}\}$

$T=\{x \mid x\text{ 是喝茶的工人}\}$

由范恩图，得 $n(C\cup T)=23+25+27$

$=75$

∴ 该工厂共有 75 名工人。



例题 7

某校调查200名初一新生的华文及数学成绩，有 80% 的学生华文及格，68% 的学生数学及华文两科都及格。若每个学生至少有一科及格。问有多少名学生数学及格？

解一： 设 $C=\{x \mid x \text{ 是华文及格的学生}\}$

$M=\{x \mid x \text{ 是数学及格的学生}\}$

则 $C \cup M$ 是初一全体新生的集合

$C \cap M$ 是两科都及格的学生集合

已知 $n(C)=200\times\frac{80}{100}$

$=160$

$n(C\cap M)=200\times\frac{68}{100}$

$=136$

$n(C\cup M)=200$

$\because\quad n(C\cup M)=n(C)+n(M)-n(C\cap M)$

$200=160+n(M)-136$

$\therefore\quad n(M)=200-160+136$

$=176$

$\therefore$ 数学及格的学生有 176 人。

解二： 设 $C=\{x \mid x \text{ 是华文及格的学生}\}$

$M=\{x \mid x \text{ 是数学及格的学生}\}$

已知 $n(C)=200\times\frac{80}{100}$

$=160$

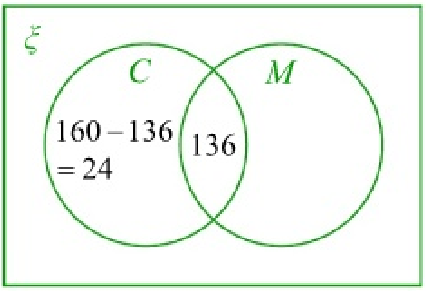
$n(C\cap M)=200\times\frac{68}{100}$

$=136$

$n(C\cup M)=200$

(续)　由范恩图得 $n(M)=200-24=176$

$\therefore$ 数学及格的学生有 176 人。



随堂练习 2

1. 在 30 个参加绘画班或音乐班的小孩中，有 15 个参加绘画班，25 个参加音乐班，问参加绘画班及音乐班的小孩有几人？
2. 某中学的老师中，教数学的有10名，教科学的有8名，兼教数学及科学的有4名，问这间中学教数学或科学的教师有多少人？

练习 10.1b

1. 某学校规定高三的学生都必须报考地理或历史科。已知报考地理科的学生有 285 名，报考历史科的学生有168名，两科都报考的有65名，问这间学校有多少位高三的学生？
2. 中华小学的教师中，教国文的有15名，教英文的有11名，兼教国、英文的有 8 名，问这间学校的国、英文教师共有多少人？
3. 一班 46 名学生都有蓝色原子笔或黑色原子笔，其中34 名有蓝色的原子笔，23名有黑色原子笔，问有多少名学生有蓝色及黑色两种原子笔？
4. 智能中学有140名学生是数学学会或物理学会的会员，其中 68 名是数学学会的会员，38名既是数学学会也是物理学会的会员，问只参加物理学会的学生有多少人？
5. 某一堂数学课，22名学生忘记带圆规，18名忘记带量角器，因此他们去向别班的同学借，如果有27名学生离开课室去借仪器，问有多少名学生两种几何仪器都忘记带？

6. 某公司的 120 名职员都喜欢足球或羽球；若 70% 的职员喜欢足球，40% 的职员喜欢羽球，问两种球类都喜欢的职员有多少人？
7. 某市镇的 3000 名居民都会讲国语或华语。据调查，65% 的居民会讲国语，78% 的居民会讲华语，问
   (a) 这两种语言都会讲的居民有多少人？
   (b) 只会讲其中一种语言的居民有多少人？
8. 某校图书馆从喜欢阅读 A 报或 B 报的读者中做调查，发现所调查的1500名读者中，78%喜欢阅读 A 报，61%喜欢阅读 B 报，问只喜欢阅读 B 报的读者有多少人？
9. 在一项校外考试中，选考英文或华文科的学生有46名。如果有 x 名学生选考英文科，$3x$ 名学生选考华文科，而有6名学生华文及英文科都选考，求 x 的值。
10. 在一次数学测验中有20题选择题，x 名学生答对少过11题，$2x$ 名学生答对超过9题，4名学生恰好答对10题，试以范恩图表示有关资料。已知有32名学生参加这项测验，求 x 的值。

10.2 余集的基数公式及其应用

若 A 是一个集合，A' 为 A 的余集，则 A 与 A' 的基数有以下的关系：

$$n(A')=n(\xi)-n(A)$$

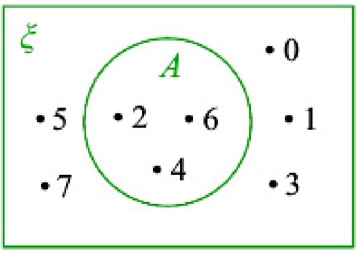
例题 1

设泛集 $\xi=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,6\}$，验证 $n(A')=n(\xi)-n(A)$。

解： $A'=\{0,1,3,5,7\}$

$n(\xi)=8$，$n(A)=3$，$n(A')=5$

$$\begin{aligned} n(\xi)-n(A) &= 8-3 \\ &= 5 \\ &= n(A') \end{aligned}$$



例题 2

甲班有42名学生中，其中喜欢数学的有29名，喜欢华文的有28名，同时喜欢这两科的有16名，问有多少名学生两科都不喜欢？

解一： 设 $\xi=\{x \mid x\text{是甲班的学生}\}$

$M=\{x \mid x\text{是喜欢数学的学生}\}$

$C=\{x \mid x\text{是喜欢华文的学生}\}$

$M\cap C=\{x \mid x\text{是喜欢数学及华文的学生}\}$

$(M\cup C)'=\{x \mid x\text{是两科都不喜欢的学生}\}$

已知 $n(\xi)=42$，$n(M)=29$，$n(C)=28$，$n(M\cap C)=16$

$$\begin{aligned} n(M\cup C) &= n(M)+n(C)-n(M\cap C) \\ &= 29+28-16 \\ & \quad 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n[(M\cup C)'] &= n(\xi)-n(M\cup C) \\ &= 42-41 \\ &= 1 \end{aligned}$$

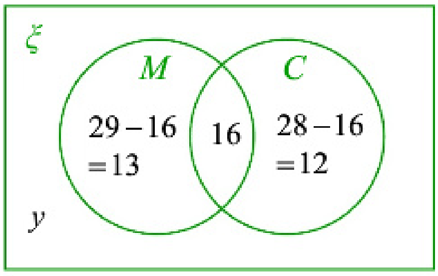
∴ 只有1名学生两科都不喜欢。

解二： 设 $\xi = \{x \mid x\text{是甲班的学生}\}$

$M = \{x \mid x\text{是喜欢数学的学生}\}$

$C = \{x \mid x\text{是喜欢华文的学生}\}$

y 为两科都不喜欢的学生人数。



由范恩图得 $13+16+12+y=42$

$y=1$

∴ 只有1名学生两科都不喜欢。

例题 3

建华中学有300名学生，45%的学生爱听文艺歌曲，63%的学生爱听流行歌曲，10%的学生两种歌曲都不喜欢，问有多少名学生文艺及流行歌曲都爱听？

解一： 设 $\xi = \{x \mid x\text{是建华中学的学生}\}$

$T = \{x \mid x\text{是爱听文艺歌曲的学生}\}$

$P = \{x \mid x\text{是爱听流行歌曲的学生}\}$

已知 $n(\xi) = 300$

$$n(T) = 300 \times \frac{45}{100} = 135$$

$$n(P) = 300 \times \frac{63}{100} = 189$$

$$n[(T \cup P)'] = 300 \times \frac{10}{100} = 30$$

(续)　$\therefore\ n(T\cup P)=n(\xi)-n[(T\cup P)']$

$=300-30$

$=270$

$\because\ n(T\cup P)=n(T)+n(P)-n(T\cap P)$

$270=135+189-n(T\cap P)$

$\therefore\ n(T\cap P)=54$

$\therefore$ 有54名学生文艺及流行歌曲都爱听。

解二： 设$\xi=\{x\mid x$ 是建华中学的学生$\}$

$T=\{x\mid x$ 是爱听文艺歌曲的学生$\}$

$P=\{x\mid x$ 是爱听流行歌曲的学生$\}$

y 为同时爱听文艺及流行歌曲的学生人数。

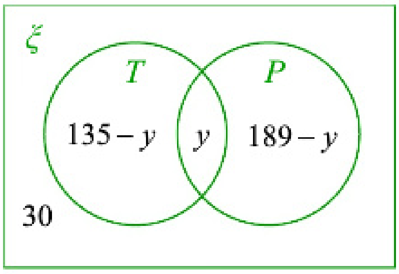
$n(T)=300\times\dfrac{45}{100}=135$

$n(P)=300\times\dfrac{63}{100}=189$

$n[(T\cup P)']=300\times\dfrac{10}{100}=30$

由范恩图得 $(135-y)+y+(189-y)+30=300$

$y=54$



$\therefore$ 有54名学生文艺及流行歌曲都爱听。

例题 4

启德学校有800名学生，80%的学生华文科及格，48%的学生数学科及格，32%的学生两科都及格，问

(a) 有多少名学生两科都不及格？

(b) 有多少名学生只有华文科及格？

解： 设 $\xi = \{x \mid x \text{ 是启德学校的学生}\}$

$C = \{x \mid x \text{ 是华文科及格的学生}\}$

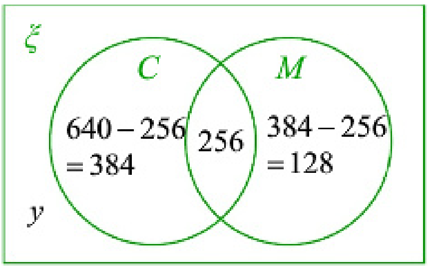
$M = \{x \mid x \text{ 是数学科及格的学生}\}$

y 为两科都不及格的学生人数。

$$n(C) = 800 \times \frac{80}{100} = 640$$

$$n(M) = 800 \times \frac{48}{100} = 384$$

$$n(C \cap M) = 800 \times \frac{32}{100} = 256$$



由范恩图得 $384 + 256 + 128 + y = 800$

$y = 32$

∴ (a) 两科都不及格的学生有32人。

(b) 只有华文科及格的学生有384人。

随堂练习 3

1. 在80个家庭中，32家有电单车，68家有汽车。若其中有25家有电单车及汽车，问有多少个家庭没有电单车也没有汽车？
2. 初一甲班有50位同学参加期末考试，结果英文不及格的有15人，数学不及格的有19人，英文及数学都及格的有21人。那么英文及数学都不及格的有多少人？

3. 初二乙班有学生46人，其中会骑脚踏车的有17人，会游泳的有14人，既会骑脚踏车又会游泳的有4人，问两样都不会的有多少人？

练习 10.2

1. 在80个小孩中，有50个补习英文，53个孩子补习国文，有25个国、英两科都补习，问两科都没补习的小孩有多少人？
2. 已知 $n(\xi)=22$，$n(P)=5$，$n(Q)=7$ 及 $n(P\cap Q)=3$，求
   (a) $n(P\cup Q)$
   (b) $n(P'\cap Q)$
   (c) $n[(P\cap Q)']$
3. 受调查的80人中，有42人喜欢喝鲜奶，54人喜欢喝橙汁，有4人两种都不喜欢喝，问
   (a) 有多少人两种饮料都喜欢喝？
   (b) 有多少人只喜欢喝鲜奶？
4. 受调查的100人中，60人喜欢看华语连续剧，78人喜欢看英语连续剧，5人两者都不喜欢，问有多少人两种连续剧都喜欢？
5. 初二忠班有48名学生，其中35名有电脑，42名有手机，32名有电脑及手机，问
   (a) 有多少名学生两者都没有？
   (b) 有多少名学生有电脑但没有手机？
6. 在120名学生中，80名只会吹口琴，25名只会弹钢琴，3名两种乐器都不会，问有多少名学生会两种乐器？
7. 在120人中，有100名爱听流行音乐，30名爱听古典音乐，而15名两者都不爱听，问
   (a) 多少名两者都爱听？
   (b) 多少名不爱听古典音乐？
   (c) 多少名不爱听流行音乐？
8. 有30名学生参加华文及数学考试，其中华文及格的学生有25名，数学不及格的学生有8名。已知 x 名学生两科都及格，2名学生两科都不及格，求 x。

9. 已知 $n(\xi)=100$，$n(A)=75$，$n(B)=65$，求 $n(A\cap B)$ 的最大可能值及最小可能值。

10. 景美新村有1200名居民，全部居民都会讲华语，350名会讲英语，500名会讲国语，问只会讲华语的居民最多有几人？最少有几人？

10.3 三个集合联集的基数公式及其应用

设 A，B，C 为三个集合，且 $n(A)=p$，$n(B)=q$，$n(C)=r$，$n(A\cap B)=a$，$n(A\cap C)=b$，$n(B\cap C)=c$，$n(A\cap B\cap C)=x$，则可画出以下的范恩图来表示其基数的关系：

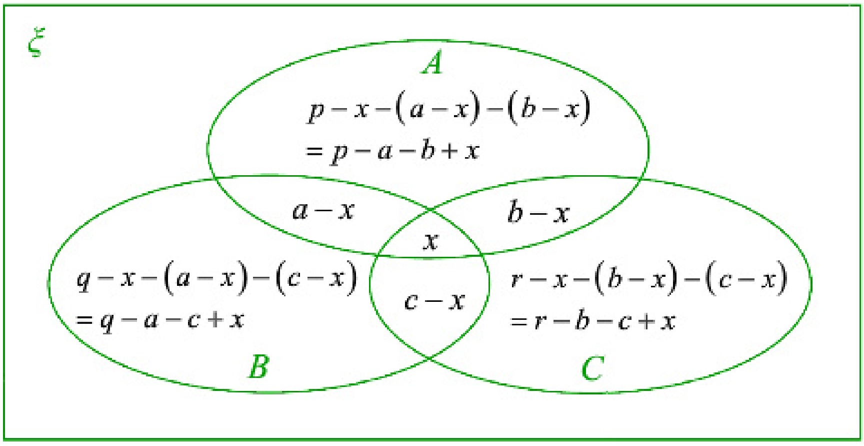


图 10-2

从图 10-2 可得出

$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) &= (p-a-b+x)+(q-a-c+x)+(r-b-c+x)+(a-x)+(b-x)+(c-x)+x \\ &= p+q+r-a-b-c+x \\ &= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

所以我们可以得出以下结果：

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

例题 1

设 $A=\{a,e,i,o,u\}$，$B=\{s,e,t\}$，$C=\{r,e,l,a,t,i,o,n\}$。验证
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

解： $A\cap B=\{e\}$，$A\cap C=\{a,e,i,o\}$，$B\cap C=\{e,t\}$，

$A\cap B\cap C=\{e\}$，

$A\cup B\cup C=\{a,e,i,o,u,s,t,r,l,n\}$

$n(A)=5$，$n(B)=3$，$n(C)=8$，

$n(A\cap B)=1$，$n(A\cap C)=4$，$n(B\cap C)=2$，

$n(A\cap B\cap C)=1$，$n(A\cup B\cup C)=10$

$$\begin{aligned}&n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)\\&=5+3+8-1-2-4+1\\&=10\end{aligned}$$

$\therefore\ n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

例题 2

某班有40名学生，他们可选修历史、地理或科学，且至少需选修其中一科。若有20名选修历史，22名选修地理，28名选修科学，12名选修历史及地理，15名选修历史及科学，14名选修地理及科学。问三科都选修的学生有几人？

解一： 设 $H=\{x\mid x\text{是选修历史的学生}\}$

$G=\{x\mid x\text{是选修地理的学生}\}$

$S=\{x\mid x\text{是选修科学的学生}\}$

(续)　已知 $n(\xi)=n(H\cup G\cup S)=40$

$n(H)\quad 20$，$n(G)\quad 22$，$n(S)\quad 28$

$n(H\cap G)=12$，$n(H\cap S)=15$，$n(G\cap S)=14$

$$n(H\cup G\cup S)=n(H)+n(G)+n(S)-n(H\cap G)-n(G\cap S)-n(H\cap S)+n(H\cap G\cap S)$$

$$40=20+22+28-12-14-15+n(H\cap G\cap S)$$

$$n(H\cap G\cap S)=11$$

∴ 三科都选修的学生有11名。

解二： 设 $H=\{x\mid x$ 是选修历史的学生$\}$

$G=\{x\mid x$ 是选修地理的学生$\}$

$S=\{x\mid x$ 是选修科学的学生$\}$

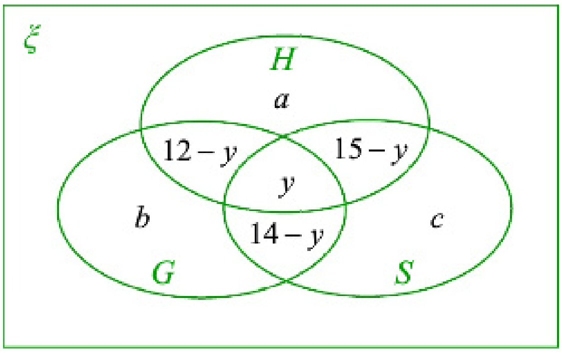
y 为选修三科的学生人数。

由范恩图得

$a=20-(12-y)-y-(15-y)$
$\quad=y-7$

$b=22-(12-y)-y-(14-y)$
$\quad=y-4$

$c=28-(15-y)-y-(14-y)$
$\quad=y-1$



$$\therefore\ (y-7)+(y-4)+(y-1)+(12-y)+(15-y)+(14-y)+y=40$$

$$y+29=40$$

$$y=11$$

∴ 三科都选修的学生有11名。

例题 3

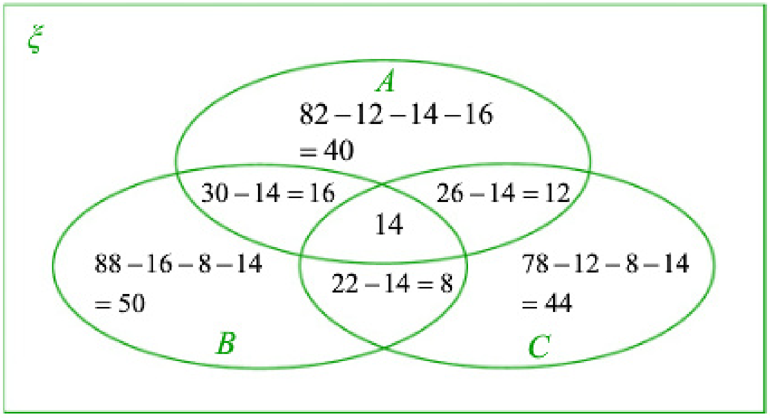
在200名读者中，有82人阅读 A 报，88人阅读 B 报，78人阅读 C 报，30人阅读 A 报及 B 报，26人阅读 A 报及 C 报，22人阅读 B 报及 C 报，14人三种报纸都阅读。问

(a) 有多少人完全不阅读上述三种报纸？

(b) 有多少人只阅读两种报纸？

(c) 有多少人只阅读一种报纸？

解：



由范恩图得

(a) 完全不阅读上述三种报纸的有

$$200-(40+12+14+16+44+8+50)$$
$$=200-184$$
$$=16\text{人}$$

(b) 只阅读两种报纸的有 $12+16+8=36$ 人

(c) 只阅读一种报纸的有 $40+44+50=134$ 人

例题 4

某班要组织三种球队，每名学生至少需参加其中一队。若有20名参加足球队，21名参加羽球队，18名参加网球队，7名只参加足球队，9名只参加羽球队，6名只参加足球及羽球队，2名只参加羽球及网球队。问

(a) 有多少名学生这三种球队都参加?

(b) 有多少名学生只参加足球及网球队?

(c) 有多少名学生只参加网球队?

(d) 这一班共有多少名学生?

解： 设 $F=\{x \mid x \text{ 是足球队员}\}$

$B=\{x \mid x \text{ 是羽球队员}\}$

$T=\{x \mid x \text{ 是网球队员}\}$

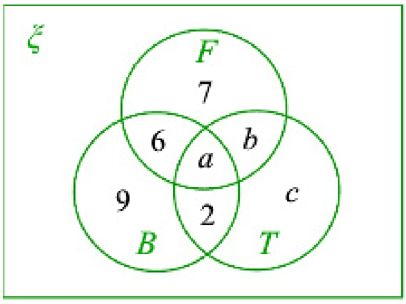
a 为参加三种球队的学生人数。

b 为只参加足球及网球队的学生人数。

c 为只参加网球队的学生人数。

已知 $n(F)=20$， $n(B)=21$， $n(T)=18$

由范恩图得



$$n(B)=6+9+2+a$$
$$21=17+a$$
$$a=4$$
$$n(F)=7+6+a+b$$
$$20=7+6+4+b$$
$$b=3$$
$$n(T)=a+b+c+2$$
$$18=4+3+c+2$$
$$c=9$$
$$\begin{aligned}n(F\cup B\cup T)&=7+6+a+b+9+2+c\\&=7+6+4+3+9+2+9\\&=40\end{aligned}$$

(续) ∴ (a) 有4人三种球队都参加。

(b) 只参加足球及网球队的有3人。

(c) 只参加网球队的有9人。

(d) 这班共有40名学生。

例题 5

在受调查的100人当中，喜欢喝咖啡的有55人，喜欢喝茶的有45人，喜欢喝鲜奶的有43人，喜欢喝茶及鲜奶的有30人，三种饮料都喜欢喝的有9人，问只喜欢喝咖啡的有几人？

解一： 设 C 是喜欢喝咖啡的人的集合

T 是喜欢喝茶的人的集合

M 是喜欢喝鲜奶的人的集合

x 是只喜欢喝咖啡的人数

y 是只喜欢喝鲜奶及咖啡的人数

z 是只喜欢喝咖啡及茶的人数

$n(C\cap M)=y+9$

$n(C\cap T)=z+9$

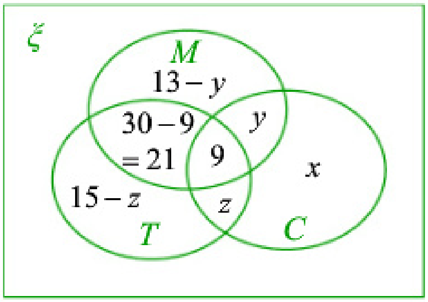
由范恩图得

$$(13-y)+y+9+21+(15-z)+z+x=100$$

$$58+x=100$$

$$x=42$$

∴ 只喜欢喝咖啡的有42人。



解二： 设 C 是喜欢喝咖啡的人的集合

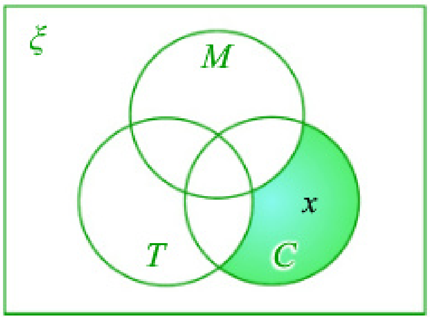
T 是喜欢喝茶的人的集合

M 是喜欢喝鲜奶的人的集合

x 是只喝咖啡的人数

由范恩图得

$$
\begin{aligned}
x &= n(M \cup T \cup C) - n(M \cup T) \\
&= 100 - [n(M) + n(T) - n(M \cap T)] \\
&= 100 - (43 + 45 - 30) \\
&= 100 - 58 \\
&= 42
\end{aligned}
$$



∴ 只喜欢喝咖啡的有42人。

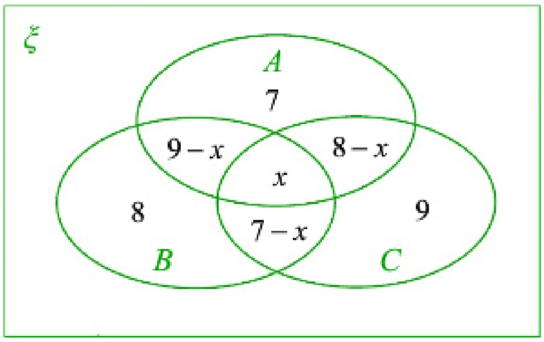
随堂练习 4

1. 外语学校有英语、法语、日语教师共27人，其中只能教英语的有8人，只能教日语的有6人，能教英、日语的有5人，能教法、日语的有3人，能教英、法语的有4人，三种都能教的有2人，问只能教法语的教师有多少人？

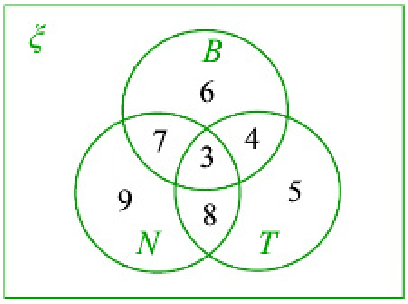
2. 某班共有30名男生，其中20人参加足球队，12人参加篮球队，10人参加排球队。已知没有人同时参加这3种球队，且每人至少参加一种球队，有6人既参加足球队又参加篮球队，有2人既参加篮球队又参加排球队，那么参加足球队又参加排球队的有多少人？

练习 10.3

1. 右图中，$\xi = A \cup B \cup C$。
   若 $n(\xi) = 34$，求
   (a) x 的值；
   (b) $n(A \cap B \cap C')$。



2. 右图中，B，T 及 N 分别为会打羽球、乒乓及网球的学生集合，问
   (a) 有多少学生会打羽球及网球?
   (b) 如果全部学生有 50 人，问这三种球类都不会的有多少人?



3. 某个团体有90名会员，每位会员必须参加一项活动，其资料如下：
   43名参加舞蹈班，
   44名参加裁缝班，
   44名参加游泳班，
   14名参加舞蹈及裁缝班，
   14名参加裁缝及游泳班，
   24名参加游泳及舞蹈班，
   求三项活动都参加的人数。

4. 某校有160名考生参加初中统考，成绩如下：

46名数学不及格，

52名历史不及格，

50名地理不及格，

31名数学及历史都不及格，

33名历史及地理都不及格，

36名数学及地理都不及格，

24名这三科都不及格。

求 (a) 至少有一科不及格的人数；

(b) 三科都及格的人数。

5. 某公司对饮品市场进行一项调查，其结果如下：

85人喜爱喝苹果汁，

65人喜爱喝橙汁，

90人喜爱喝西瓜汁，

30人喜爱喝苹果汁及橙汁，

45人喜爱喝橙汁及西瓜汁，

40人喜爱喝苹果汁及西瓜汁，

15人三种饮料都喜爱，

25人三种饮料都不喜爱。

问 (a) 有多少人接受这项调查？

(b) 有多少人只喜爱一种饮品？

6. 100名学生参加登山，露营或瑜伽三项活动，且每人至少须参加一项。

有50人参加登山，

有40人参加露营，

有60人参加瑜伽，

有20人参加登山及露营，

有18人参加露营及瑜伽，

有15人参加登山及瑜伽。

求 (a) 三项活动都参加的人数；

(b) 只参加瑜伽的人数。

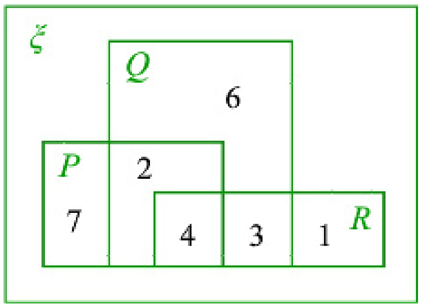
7. 80名学生参加华文、英文及数学考试。
   只有英文及格的学生有8名，
   只有数学及格的学生有10名，
   只有数学及华文及格的学生有7名，
   数学及英文及格的学生有40名，
   英文及华文及格的学生有21名，
   英文及格的学生有54名。
   如果每个学生至少有一科及格，
   求 (a) 三科都及格的学生人数；
   (b) 只有华文一科及格的学生人数。

8. 100位坐过飞机、轮船或火车的人士中，有41位坐过飞机，30位坐过轮船，72位坐过火车，15位坐过飞机及轮船，19位坐过飞机及火车，而17位坐过轮船及火车。问三种交通工具都坐过的有多少人?

9. 某校有1100名学生，调查该校学生选看电影的情况，得出下列资料：
   60%喜爱科幻片，
   50%喜爱动画片，
   50%喜爱喜剧片，
   30%喜爱科幻片及动画片，
   20%喜爱动画片及喜剧片，
   30%喜爱科幻片及喜剧片，
   10%三类影片都喜爱。
   问 (a) 喜爱科幻片或动画片而不喜爱喜剧片的学生有多少人?
   (b) 只喜爱其中两类影片的学生有多少人?
   (c) 三类影片都不喜爱的学生有多少人?

总复习题 10

1. 若 $n(A)=75$，$n(B)=28$ 及 $n(A\cap B)=15$，求 $n(A\cup B)$。
2. 若 $n(P)=46$，$n(Q)=24$ 及 $P\cap Q=\phi$，求 $n(P\cup Q)$。
3. 若 $n(R)=43$，$n(S)=74$ 及 $R\subset S$，求 $n(R\cap S)$。
4. 若 $A\subset B$，$n(A)=42$，$n(B)=75$，求 $n(A\cap B)$ 及 $n(A\cup B)$。
5. 某冷饮小贩卖出55杯椰水，71杯蔗水，若有14位顾客喝椰水及蔗水，没有人喝同一饮品超过一杯，问有多少位顾客光顾该小贩？
6. 调查200名孩童，得知120名喜爱弹钢琴，100名喜爱吹口琴，20名两者都不喜爱，问
   (a) 有多少名不爱弹钢琴？
   (b) 有多少名不爱吹口琴？
   (c) 有多少名两者都喜爱？
7. 在右图中，P，Q 及 R 分别为喜爱玩足球、钓球及篮球的学生集合，求
   (a) 全体学生人数；
   (b) 只喜爱钓球及另一种球类的学生人数；
   (c) 至少喜爱两种球类的学生人数。



8. 某班学生中，
   喜欢数学的有29名，
   喜欢华文的有24名，
   喜欢国文的有16名，
   喜欢数学及华文的有10名，
   喜欢华文及国文的有9名，
   喜欢数学及国文的有8名，
   同时爱好三科的有6名，
   三科都不喜欢的有1名。
   问 (a) 全班有多少名学生？
   (b) 只喜欢数学的有几名？
   (c) 不喜欢数学但喜欢国文及华文两科的有几名？

9. 在一项数学考试中，
70名学生选答第一题，
50名学生选答第二题，
42名学生选答第三题，
30名学生选答第一及第二题，
8名学生选答第二及第三题，
28名学生选答第一及第三题，
3名学生三题全答。
问 (a) 有多少名学生只答第一题?
(b) 有多少名学生选答至少两题?

10. 在150名考生中，
数学及格的有85名，
物理及格的有78名，
化学及格的有75名，
数学及物理及格的有56名，
物理及化学及格的有45名，
数学及化学及格的有52名，
三科全及格的有42名。
求 (a) 三科都不及格的人数，
(b) 至少有一科及格的人数。

11. 设 $n(A)=11$， $n(B)=10$， $n(C)=16$， $n(B\cup C)=20$， $n(A\cap B\cap C)=4$，
求 (a) $n(B\cap C)$；
(b) $n\big(A\cup(B\cap C)\big)$。

11 一元二次方程式与一元二次函数

学习目标

- 能解一元二次方程式及相关应用题
- 能描绘一元二次函数的图像及掌握其性质



11.1 一元二次方程式的解法

一元二次方程式

在只含一个未知数，且未知数的最高次方为2的方程式称为一元二次方程式。例如，$x^2+3x-5=0$，$5-2x^2=0$，$x^2-3x=0$，$3x^2+12x=5$ 都是一元二次方程式。

一元二次方程式的一般式是 $ax^2+bx+c=0$，其中 $a\neq0$，x是未知数。

例题 1

下列各式中，哪些是一元二次方程式？若不是，说明原因。

(a) $x^2+3x=6$ (b) $5-x^2=0$

(c) $x^2+3xy+y^2=0$ (d) $x^2-\frac{2}{5}x=0$

(e) $x^3-x-1=0$

解： (a)，(b) 及 (d) 是一元二次方程式。

(c) 不是，此方程式含有两个未知数。

(e) 不是，此方程式的最高次方是3次方。

随堂练习 1

下列方程式中，哪些是一元二次方程式？若不是，说明原因。

(a) $x^2-x+2=0$ (b) $x^2-xy-2=0$

(c) $y^3+1=y$ (d) $2y^2=y-4$

对于一元二次方程式 $x^2=9$，当 $x=3$ 或 $x=-3$ 时，方程式 $x^2=9$ 的左右两边的值相等，我们说 $x=3$ 或 $x=-3$ 满足方程式 $x^2=9$。能满足方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ 的 x 的值称为方程式的解或根。如 $x=3$ 或 $x=-3$ 是方程式 $x^2=9$ 的解或根。

解一元二次方程式常用的方法是：

(一) 因式分解法

(二) 配方法

(三) 公式法

因式分解法

一般上，解一元二次方程式时，先将方程式化为一般式 $ax^2+bx+c=0$，然后将 ax^2+bx+c 分解成两个一次因式的乘积，再分别令每个因式为0就可求出方程式的两个根。这种解法叫做因式分解法。

补充资料

当两数的乘积为零时，两数之中必须至少有一个是零，即 $ab=0$ 时，必有 $a=0$ 或 $b=0$；而且若 $a=0$ 或 $b=0$，也必定有 $ab=0$。上述的情况不可以推广到积不为零的情况，例如：当 $ab=6$ 时，我们并不能确切地说 $a=6$ 或 $b=6$。

思考题

当 $ab=6$ 时，a 与 b 有哪些可能的值？

例题 2

解方程式 $x^2+5x+6=0$。

解：

$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+2)(x+3)=0$$
$$x+2=0 \quad \text{或} \quad x+3=0$$
$$\therefore \quad x=-2 \quad \text{或} \quad x=-3$$

例题 3

解方程式 $x^2-2x-8=0$。

解：

$$x^2-2x-8=0$$
$$(x+2)(x-4)=0$$
$$x+2=0 \quad \text{或} \quad x-4=0$$
$$\therefore \quad x=-2 \quad \text{或} \quad x=4$$

例题 4

求下列各方程式的根：

(a) $x^2+12=-7x$　　(b) $2x^2=5x-2$

解： (a)

$$x^2+12=-7x$$
$$x^2+7x+12=0$$
$$(x+3)(x+4)=0$$
$$x+3=0 \quad \text{或} \quad x+4=0$$
$$\therefore \quad x=-3 \quad \text{或} \quad x=-4$$

(b)

$$2x^2 = 5x - 2$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(2x-1)(x-2) = 0$$

$$2x - 1 = 0 \quad 或 \quad x - 2 = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2} \quad 或 \quad x = 2$$

例题 5

求下列各方程式的解：

(a) $3x^2 = 12x$

(b) $(2x+1)(2-5x) = 0$

(c) $(x-3)(x+2) = 14$

(d) $3x(x+2) = 5(x+2)$

解： (a)

$$3x^2 = 12x$$

$$x^2 = 4x$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \quad 或 \quad x - 4 = 0$$

$$\therefore \quad x = 0 \quad 或 \quad x = 4$$

(b) $(2x+1)(2-5x) = 0$

$$2x + 1 = 0 \quad 或 \quad 2 - 5x = 0$$

$$\therefore \quad x = -\frac{1}{2} \quad 或 \quad x = \frac{2}{5}$$

思考题

在例题5的(a)中，为什么可以两边约去3而不能约去x？

(c) $(x-3)(x+2)=14$

$$x^2-x-6=14$$

$$x^2-x-20=0$$

$$(x+4)(x-5)=0$$

$\therefore\ x+4=0$ 或 $x-5=0$

$x=-4$ 或 $x=5$

(d) $3x(x+2)=5(x+2)$

$$3x(x+2)-5(x+2)=0$$

$$(x+2)(3x-5)=0$$

$x+2=0$ 或 $3x-5=0$

$\therefore\ x=-2$ 或 $x=\dfrac{5}{3}$

思考题

在例题5的(d)中为什么不能将两边的$x+2$约掉？

随堂练习 2

解下列各方程式：

1. $y^2-7y=18$

2. $4x^2-8x+3=0$

例题 6

解下列各方程式：

(a) $x^2-4=0$

(b) $25x^2=9$

(c) $x^2+9=0$

(d) $(x-1)^2=16$

(e) $(x-2)^2=3$

解： (a) $x^2-4=0$

$$x^2=4$$

$\therefore\ x=\pm 2$

(b) $25x^2=9$

$x^2=\dfrac{9}{25}$

$\therefore\ x=\pm\dfrac{3}{5}$

(c) $x^2+9=0$

$x^2=-9$

$\because\ x^2$ 不可能为负数

$\therefore$ 原方程式无解

(d) $(x-1)^2=16$

$x-1=\pm4$

$x-1=4$ 或 $x-1=-4$

$\therefore\ x=5$ 或 $x=-3$

(e) $(x-2)^2=3$

$x-2=\pm\sqrt{3}$

$\therefore\ x=2\pm\sqrt{3}$

配方法

有些一元二次方程式不容易用因式分解法求解。这时，我们可用配方法将一个一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$ 化为 $(x+p)^2=q$ 的形式，再求解。

利用完全平方公式 $(x+p)^2=x^2+2px+p^2$，我们可将 x^2+bx 配方成 $x^2+bx+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2$。

例题 7

用适当的数填空：

(a) $x^2+8x+______=(x+____)^2$

(b) $x^2-10x+______=(x-____)^2$

(c) $x^2+5x+______=(x+____)^2$

(d) $x^2+kx+______=(x+____)^2$

解： (a) $x^2+8x+\underline{\ 4^2\ }=(x+\underline{\ 4\ })^2$

(b) $x^2-10x+\underline{\ 5^2\ }=(x-\underline{\ 5\ })^2$

(c) $x^2+5x+\underline{\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\left(x+\underline{\frac{5}{2}}\right)^2$

(d) $x^2+kx+\underline{\left(\frac{k}{2}\right)^2}=\left(x+\underline{\frac{k}{2}}\right)^2$

例题 8

解下列各方程式：

(a) $x^2-6x-1=0$

(b) $x^2+5x=-2$

(c) $2x^2+6x+3=0$

(d) $2x^2+3x-1=0$

解： (a)

$$x^2-6x-1=0$$
$$x^2-6x=1$$
$$x^2-6x+3^2=1+3^2$$
$$(x-3)^2=10$$
$$x-3=\pm\sqrt{10}$$
$$x=3\pm\sqrt{10}$$

(b)
$$x^2+5x=-2$$
$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=-2+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$$
$$x+\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$$
$$x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$$

(c)
$$2x^2+6x+3=0$$
$$2x^2+6x=-3$$
$$x^2+3x=-\frac{3}{2}$$
$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$
$$x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

注意

若方程式中 x^2 的系数不是1，为了容易配方，可先将方程式的各项除以 x^2 的系数，使 x^2 的系数化为1。

(d)
$$2x^2+3x-1=0$$
$$2x^2+3x=1$$
$$x^2+\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$$
$$x^2+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$$
$$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$
$$x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

随堂练习 3

解下列各方程式：

1. $x^2+2x-4=0$　　　　2. $3x^2+6x+2=0$

公式法

用配方法可以推导出一元二次方程式的求根公式。

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

即　$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

一、当 $b^2-4ac\geq 0$ 时，由上式可得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

二、当 $b^2-4ac<0$ 时，方程式

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 的右式 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 是一个负数，

而 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 不可能为负数，所以原方程式无实数解。

由此可得

> 方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的求根公式为
>
> $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad (b^2-4ac\geq 0)$$

运用上述公式来解一元二次方程式的方法叫做公式法。

例题 9

解下列各方程式：

(a) $x^2+4x-3=0$

(b) $3x^2-6x-1=0$

(c) $2x^2+7x+4=0$

解： (a) $x^2+4x-3=0$

$a=1$， $b=4$， $c=-3$

$$\therefore\ x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(-3)}}{2(1)}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{28}}{2}$$

$$=\frac{-4\pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$=\frac{2\left(-2\pm\sqrt{7}\right)}{2}$$

$$=-2\pm\sqrt{7}$$

(b) $3x^2-6x-1=0$

$$\therefore \quad x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{6^2-4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{48}}{6}$$

$$=\frac{6\pm4\sqrt{3}}{6}$$

$$=\frac{3\pm2\sqrt{3}}{3}$$

(c) $2x^2+7x+4=0$

$$\therefore \quad x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4(2)(4)}}{2(2)}$$

$$=\frac{-7\pm\sqrt{17}}{2(2)}$$

$$=\frac{-7\pm\sqrt{17}}{4}$$

随堂练习 4

利用公式法解下列各方程式：

1. $4x^2=8x+3$

2. $x^2-6x+3=0$

练习 11.1

解下列各方程式：(1 至 2)

1. $25x^2 = 49$
2. $4x^2 - 1 = 0$

用因式分解法解下列各方程式：(3 至 10)

3. $x^2 - 6x - 16 = 0$
4. $p^2 = 3p + 10$
5. $z^2 - z - 20 = 0$
6. $3x^2 - 5x - 8 = 0$
7. $10t^2 - t = 2$
8. $(t+8)(t-3) = 3t$
9. $(8-3x)(3+x) = 20$
10. $(x-1)^2 + (x+3)^2 = 26$

用配方法解下列各方程式：(11 至 16)

11. $x^2 + 2x - 4 = 0$
12. $z^2 - 4z + 1 = 0$
13. $2x^2 = 15 - 8x$
14. $3x^2 + 6x + 2 = 0$
15. $2y^2 - 3y = 7$
16. $3x^2 - 4x - 2 = 0$

用公式法解下列各方程式：(17 至 24)

17. $x^2 + 2x - 7 = 0$
18. $x^2 - 8x + 3 = 0$
19. $2x^2 + 4x - 3 = 0$
20. $3y^2 = 9y - 2$
21. $4z^2 - 9z = -3$
22. $(2x-5)(x+2) = 1$
23. $7x + 2 = 3x^2$
24. $3x^2 - 12x + 6 = 0$

解下列各方程式：(25 至 34)

25. $2x^2 - x - 21 = 0$
26. $4t^2 - 12t + 9 = 0$
27. $x^2 - \frac{1}{4} = x$
28. $x(x+3) = 6x + 5$
29. $40 = 3y^2 + 10y$
30. $x(2x+3) + 6 = 2(x+6)$
31. $5 = (3x-5)^2$
32. $3x^2 - 17x + 20 = 0$
33. $2x(3-x) = 7(x-3)$
34. $(x+2)^2 = (2x-1)^2$

11.2 应用问题

例题 1

有一长方形的壁画，它的长比宽多2公尺。此壁画的面积为24平方公尺，求它的长与宽。



解： 设壁画的长为x公尺，则宽为$(x-2)$公尺。

依题意可得：

$$x(x-2)=24$$
$$x^2-2x-24=0$$
$$(x+4)(x-6)=0$$
$$x=-4 \quad 或 \quad x=6$$

但壁画的长不能为负数，所以只能取$x=6$。

$\therefore$ 壁画的长为6公尺，宽为4公尺。

例题 2

两个连续偶数的积为120，求此二数。

解： 设较小的偶数为x，则另一个偶数为$x+2$。

依题意可得：

$$x(x+2)=120$$
$$x^2+2x-120=0$$
$$(x+12)(x-10)=0$$
$$x=-12 \quad 或 \quad x=10$$

偶数可以是正数，也可以是负数，所以$x=-12$或$x=10$都合题意。

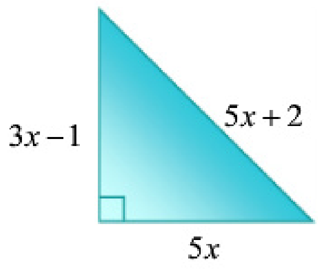
当$x=-12$，$x+2=-10$；当$x=10$，$x+2=12$。

$\therefore$ 这两个偶数为-12，-10或10，12。

例题 3

一直角三角形的边长分别为 $(3x-1)$ cm， $5x$ cm 及 $(5x+2)$ cm。求此三角形各边的长及面积。

解： 由于 $x>0$，在 $(3x-1)$，$5x$ 及 $(5x+2)$ 中，$(5x+2)$ 的值最大，所以长为 $(5x+2)$ 的边是斜边。



应用毕氏定理，得

$$(3x-1)^2+(5x)^2=(5x+2)^2$$

$$9x^2-6x+1+25x^2=25x^2+20x+4$$

$$9x^2-26x-3=0$$

$$(9x+1)(x-3)=0$$

$$x=-\frac{1}{9} \quad 或 \quad x=3$$

$\because \ x>0$

$\therefore \ x=3$

当 $x=3$ 时，$3x-1=8$

$5x=15$

$5x+2=17$

$\therefore$ 此三角形各边的长为 8 cm，15 cm 及 17 cm。

$$面积=\frac{1}{2}\times 8\times 15$$

$$=60\ \text{cm}^2$$

练习 11.2

1. 两个连续的整数的积是210，求这两个数。
2. 有一张长19 cm，宽15cm的长方形纸片，需要在四个角落剪去边长为多少的小正方形才能做成底面积为77 cm^2 的无盖长方形的纸盒？
3. 一三角形的底比高少3 cm，面积是14 cm^2，求三角形的高。
4. 一直角三角形的边长分别为 $(2x+1)$ cm，$2x$ cm及 $(x-1)$ cm。求 x 的值。
5. 一张桌子的桌面长6米，宽4米。长方形桌布的面积是桌面面积的2倍。若将桌布铺在桌子上，四边垂下的长度相同。求这块桌布的长与宽。
6. 有一长方形的草场，长为70 m，宽为50 m，四周外围筑有一个等宽的水泥人行道。若人行道的面积为244 m^2，问人行道宽多少公尺？
7. 游行队伍有8行12列，后又增加了69人，使得队伍增加的行数与增加的列数的数目相同。问增加了多少行？
8. 印度古算术书中有这样一首诗：“一群猴子分两队，高高兴兴在游戏，八分之一再平方，蹦蹦跳跳树林里；其余十二叽喳喳，伶俐活泼又调皮，告我总数共多少，两队猴子在一起。”
(大意是说：一群猴子分成两队在玩游戏，其中八分之一的平方只的猴子在树林里蹦蹦跳跳，其余的十二只猴子在吵闹，问共有多少只猴子？)

11.3 一元二次函数的图像

一元二次函数的基本形式为 $y=ax^2+bx+c$，其中 a，b，c 为常数，且 $a\neq 0$。

例题 1

作 $y=x^2$ 的图像。

解： 将 x 和 y 的对应值列表如下：

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y	…	9	4	1	0	1	4	9	…

在直角坐标系内描出各点，并用平滑曲线把各点顺序连接起来，就得到函数 $y=x^2$ 的图像，如图11-1所示。

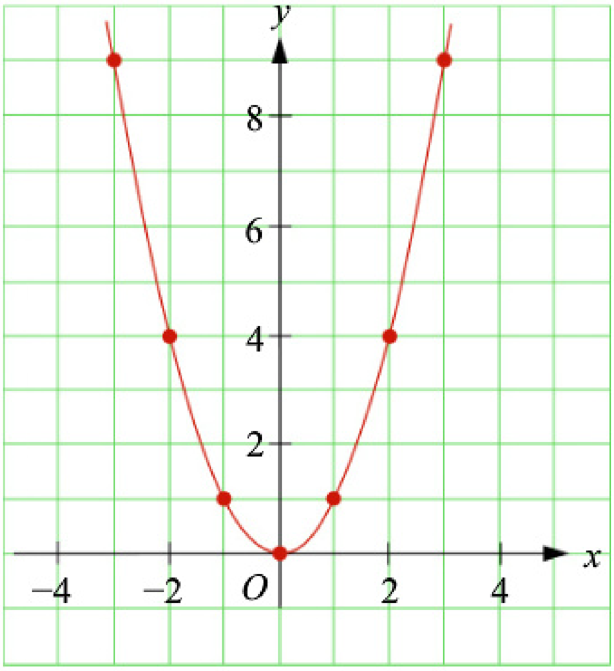


图11-1

例题 2

作 $y=x^2-4x+2$ 的图像。

解： 将 x 和 y 的对应值列表如下：

x	…	−1	0	1	2	3	4	5	…
y	…	7	2	−1	−2	−1	−2	7	…

函数 $y=x^2-4x+2$ 的图像如图 11-2 所示。

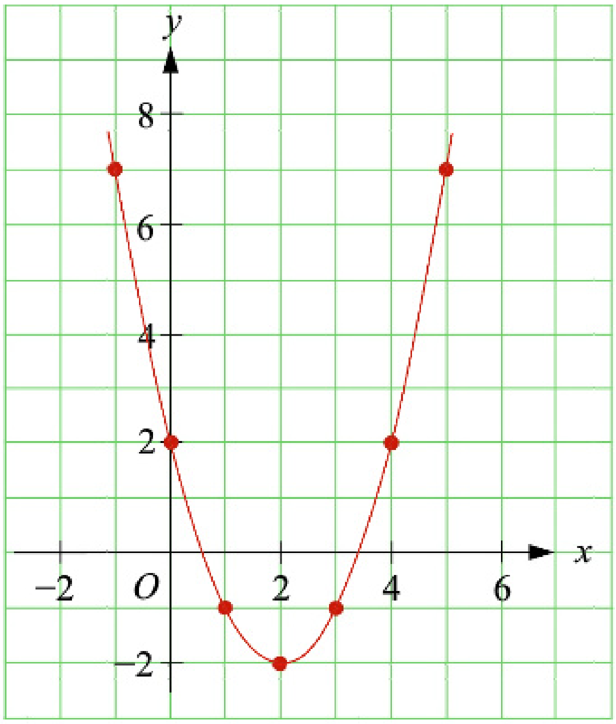


图 11-2

例题 3

已知 $y=-x^2+3x+1$。作此函数在 $-1\leq x\leq 4$ 的图像。

解： 将 x 和 y 的对应值列表如下：

x	−1	0	1	2	3	4
y	−3	1	3	3	1	−3

函数 $y=-x^2+3x+1$ 的图像如图11-3所示。

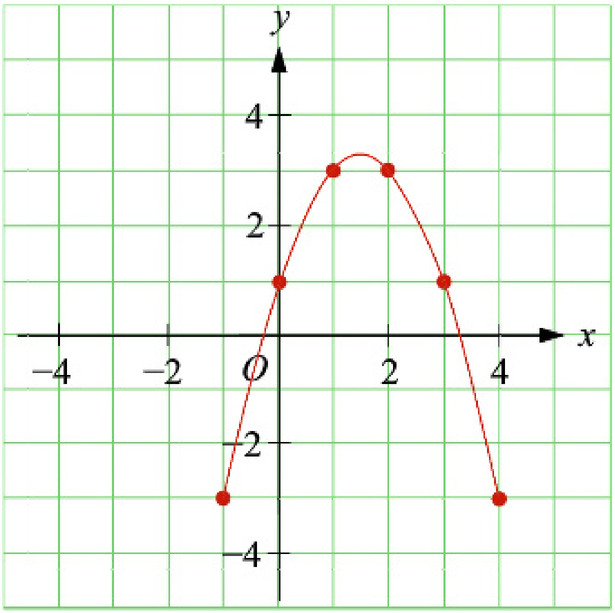


图11-3

图11-3所示的图像形如物体抛射时所经过的路线，而图11-1及图11-2与图11-3相似，只是开口的方向不一样。我们将一元二次函数的图像叫做抛物线。当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，如图11-1及图11-2所示。当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，如图11-3所示。一元二次函数的图像是对称图形，对称轴与 y 轴平行。对称轴与抛物线的交点为抛物线的顶点。当 $a>0$ 时，顶点为最低点，当 $a<0$ 时，顶点为最高点。

例题 4

作 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+2$ 的图像。

解：

x	…	−4	−3	−2	−1	0	1	2	…
y	…	$6\frac{1}{2}$	4	$2\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	4	$6\frac{1}{2}$	…

函数 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2+2$ 的图像如图 11-4 所示。

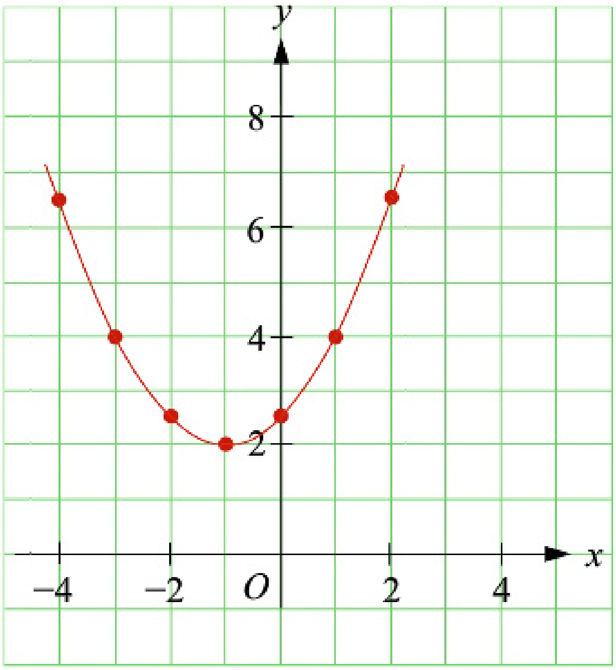


图11-4

由例题 4 可以看出，抛物线的对称轴是直线 $x=-1$，顶点为最低点 $(-1, 2)$。

随堂练习 5

作下列各函数的图像：

1. $y=x^2+2x-2$
2. $y=-2x^2-5x+3$

练习 11.3

作下列各抛物线的图像，并求其对称轴与顶点坐标：(1至4)

1. $y=x^2+x-6$
2. $y=x^2+5x+6$
3. $y=1-x^2$
4. $y=6-4x-2x^2$

在给定范围内，作下列各抛物线的图像：(5至8)

5. $y=x^2+3x-1$，$-4\le x\le 4$
6. $y=2-x-x^2$，$-5\le x\le 4$
7. $y=3x^2-2x+1$，$-2\le x\le 3$
8. $y=3x-2x^2$，$-2\le x\le 3$

总复习题 11

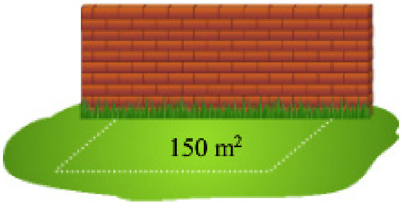
解下列各方程式：(1至10)

1. $x^2+4x-5=0$
2. $25x^2-64=0$
3. $x(x+1)=42$
4. $6z^2-7z+2=0$
5. $2x^2+9x+3=0$
6. $5x^2=3-6x$
7. $4(y+2)^2=9$
8. $(3y+8)(5-y)=0$
9. $x(2x+3)=2(2x+3)$
10. $(8-3t)(3+t)=20$

11. 一长方形的长比宽多7 cm，其面积为120 cm^2，求其长与宽。
12. 已知两数的差是3，大数的4倍等于小数的平方，求这两数。

13. 萧老师规定他班上的每一位学生必须给每位同学各做一张生日卡。若全班同学一共做了1722张生日卡，问班上共有几位学生?

14. 有一面积为150 m^2 的长方形农场，农场的一边靠墙，另三边用长为35 m的铁丝网围成，求此农场的长与宽。



作下列各函数的图像，并求其对称轴与顶点坐标：(15至18)

15. $y = x^2 + 4x - 5$

16. $y = -4x - 2x^2$

17. $y = x^2 - 5$

18. $y = -\frac{1}{2}x^2$

在给定范围内，作下列各抛物线的图像：(19至22)

19. $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$，$-2 \le x \le 3$

20. $y = 2x^2 - 4x + 3$，$-2 \le x \le 4$

21. $y = 2 - 3x^2$，$-3 \le x \le 3$

22. $y = 4x - x^2$，$-1 \le x \le 5$

12 分式

学习目标

- 理解分式及其基本性质
- 能进行分式的四则运算
- 能解分式方程式
- 能解分式的应用问题



12.1 分式的概念与基本性质

分式的概念

如果A与B是多项式($B\neq0$)，那么以$\frac{A}{B}$的形式表示的代数式，就叫做分式，其中A叫做分子，B叫做分母。例如，$\frac{3}{x+1}$，$\frac{2x+3}{4}$，$\frac{2x+y}{x-2y}$，$\frac{x-y}{x^2+y^2}$，$\frac{3x+1}{x^2+4x-1}$都是分式。

分式的基本性质

在初中一，我们已经学过了分数的基本性质。分数的分子与分母都乘以或除以同一个不等于零的数时，分数的值不变。同样的，分式也有相同的基本性质，即分式的分子与分母可以同时乘以或除以同一个不等于零的多项式。

$$\frac{A}{B}=\frac{A\times M}{B\times M}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{A\div M}{B\div M}$$

其中M为不等于零的多项式。

约分

在一个分式$\frac{C}{D}$中，若C可以分解成$A\times M$，D也可以分解成$B\times M$，即$\frac{C}{D}=\frac{A\times M}{B\times M}$，则根据分式的基本性质，可得$\frac{C}{D}=\frac{A\times M}{B\times M}=\frac{A}{B}$。

将一个分式的分子与分母的公因式约去，从而把该分式化简，这种过程叫做约分。例如分式$\frac{2y^2}{4xy}$的分子与分母有公因式，因此$\frac{2y^2}{4xy}=\frac{y\cdot 2y}{2x\cdot 2y}=\frac{y}{2x}$。

如果化简后的分式，其分子与分母的最高公因式是1，则这个分式就叫做最简分式。一般上，我们将分式化简成最简分式。

例题 1

化简下列各式：

(a) $\frac{6xy}{6x^2}$　　(b) $\frac{9abc}{3a}$

(c) $\frac{a^2bc}{ab^2c^3}$　　(d) $\frac{45(x-y)^2}{35(x-y)}$

解： (a) $\frac{6xy}{6x^2}=\frac{y}{x}$

(b) $\frac{9abc}{3a}=3bc$

(c) $\frac{a^2bc}{ab^2c^3}=\frac{a}{bc^2}$

(d) $\frac{45(x-y)^2}{35(x-y)}=\frac{9(x-y)}{7}$

例题 2

化简下列各式：

(a) $\frac{15x^2+10x^3}{20x}$

(b) $\frac{4a^2-6ab}{9b^2-6ab}$

(c) $\frac{x^2-9}{x^2+3x}$

(d) $\frac{9a^2-6ab-3b^2}{3a^2-3b^2}$

解： (a) $\frac{15x^2+10x^3}{20x}=\frac{5x^2(3+2x)}{20x}$

$=\frac{x(3+2x)}{4}$

(b) $\frac{4a^2-6ab}{9b^2-6ab}=\frac{2a(2a-3b)}{3b(3b-2a)}$

$=-\frac{2a(2a-3b)}{3b(2a-3b)}$

$=-\frac{2a}{3b}$

(c) $\frac{x^2-9}{x^2+3x}=\frac{(x+3)(x-3)}{x(x+3)}$

$=\frac{x-3}{x}$

(d) $\frac{9a^2-6ab-3b^2}{3a^2-3b^2}=\frac{3(3a^2-2ab-b^2)}{3(a^2-b^2)}$

$=\frac{(3a+b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}$

$=\frac{3a+b}{a+b}$

随堂练习 1

化简下列各式：

1. $\dfrac{4ab}{14bc}$ 2. $\dfrac{9x^2y}{6xy^3}$ 3. $\dfrac{ab-bc}{cd-da}$ 4. $\dfrac{x^2-y^2}{xy-y^2}$

练习 12.1a

化简下列各式：

1. $\dfrac{4a^3}{2a^2}$
2. $\dfrac{9ab^3}{12a^2b}$
3. $\dfrac{4cd^4}{6c^2d^2}$
4. $\dfrac{3m^4n^5}{2m^3n^4}$
5. $\dfrac{4(a-b)}{6(b-a)}$
6. $\dfrac{(a-b)(b-c)}{(b-a)(c-b)}$
7. $\dfrac{3b^2-12ab}{3b}$
8. $\dfrac{6b}{4b^2-9ab}$
9. $\dfrac{x^2+xy}{xy+y^2}$
10. $\dfrac{3p+3q}{9r}$
11. $\dfrac{x+y}{x^2-y^2}$
12. $\dfrac{5ab}{10ac-5ab}$
13. $\dfrac{4x^2-6xy}{2x-3y}$
14. $\dfrac{ab+ac}{ad+ae}$
15. $\dfrac{2x^2-7x+3}{2x-6}$
16. $\dfrac{ab}{ab-b^2}$
17. $\dfrac{x^2-16}{4-x}$
18. $\dfrac{x^2+4x-32}{xy-4y}$
19. $\dfrac{a^2-2a-15}{a^2-3a-10}$
20. $\dfrac{9-x^2}{x^2+5x+6}$

21. $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2+2x-63}$

22. $\dfrac{pq^2-2pq^3}{p^2q-2p^2q^2}$

23. $\dfrac{2x^2+xy-y^2}{2x^2+5xy-3y^2}$

24. $\dfrac{a^2x^2-16a^2}{ax^2+9ax+20a}$

通分

根据分式的基本性质 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times M}{B\times M}$，我们可以将几个分母不同的分式，分别化成相同分母的分式。这样的过程，叫做通分。一般上，通分后的分母是各个分式分母的最低公倍式 (L.C.M.)。

例题 3

通分下列各式：

(a) $\dfrac{a}{3b}$，$\dfrac{2b}{5c}$

(b) $\dfrac{1}{2x}$，$\dfrac{1}{3y^2}$，$\dfrac{1}{4xy}$

(c) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$，$\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$

解： (a) 各分母的 L.C.M. $=15bc$。

$$\therefore\ \frac{a}{3b}=\frac{a\cdot 5c}{3b\cdot 5c}=\frac{5ac}{15bc}$$

$$\frac{2b}{5c}=\frac{2b\cdot 3b}{5c\cdot 3b}=\frac{6b^2}{15bc}$$

(b) 各分母的 L.C.M. $=12xy^2$。

$$\therefore\ \frac{1}{2x}=\frac{1\cdot 6y^2}{2x\cdot 6y^2}=\frac{6y^2}{12xy^2}$$

$$\frac{1}{3y^2}=\frac{1\cdot 4x}{3y^2\cdot 4x}=\frac{4x}{12xy^2}$$

$$\frac{1}{4xy}=\frac{1\cdot 3y}{4xy\cdot 3y}=\frac{3y}{12xy^2}$$

(c) $\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}=-\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}$

各分母的 L.C.M. $=(a-b)(a-c)(b-c)$。

$$\therefore\ \frac{1}{(a-b)(a-c)}=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{1}{(b-a)(b-c)}=-\frac{a-c}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

注意

$\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$ 也可以写成 $\dfrac{1}{(a-b)(c-b)}$。

例题 4

将 $\dfrac{3}{2x-2}$，$\dfrac{5}{x^2-2x+1}$，$\dfrac{x}{x^2-1}$ 通分。

解： $2x-2=2(x-1)$

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

$x^2-1=(x+1)(x-1)$

各分母的 L.C.M. $=2(x+1)(x-1)^2$。

$$\therefore\ \frac{3}{2x-2}=\frac{3}{2(x-1)}=\frac{3(x+1)(x-1)}{2(x+1)(x-1)^2}$$

$$\frac{5}{x^2-2x+1}=\frac{5}{(x-1)^2}=\frac{10(x+1)}{2(x+1)(x-1)^2}$$

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x(x-1)}{2(x+1)(x-1)^2}$$

随堂练习 2

通分下列各式：

1. $\frac{3}{2a}$，$\frac{2}{3b}$

2. $\frac{1}{6x}$，$\frac{1}{10xy}$，$\frac{1}{15x^2}$

3. $\frac{b}{a^2+ab}$，$\frac{a}{ab+b^2}$

练习 12.1b

通分下列各式：

1. $\frac{a}{bc}$，$\frac{b}{ca}$

2. $\frac{2}{3a^2}$，$\frac{1}{6ab^2}$

3. $\frac{1}{2x^2y}$，$\frac{1}{3xy^2}$

4. $\frac{z}{xy}$，$\frac{x}{yz}$，$\frac{y}{zx}$

5. $\frac{b}{a-b}$，$\frac{a}{(b-a)^2}$

6. $\frac{2}{y-x}$，$\frac{1}{2x-2y}$

7. $\frac{x}{x-2}$，$\frac{2}{x^2-4}$

8. $\frac{1}{x+2}$，$\frac{x}{x^2+4}$

9. $\frac{p}{ap-aq}$，$\frac{q}{bq-bp}$

10. $\frac{2}{x+3}$，$\frac{4}{x-3}$

11. $\frac{1}{x^2-1}$，$\frac{1}{x^2-3x+2}$

12. $\frac{y+5}{y^2+5y-6}$，$\frac{y+6}{y^2-6y+5}$

13. $\frac{1}{m^2+m-2}$，$\frac{1}{m^2-m-2}$，$\frac{1}{m^2-4}$

14. $\frac{x}{x^2-3x+2}$，$\frac{x}{x^2-4x+3}$，$\frac{x}{x^2-5x+6}$

12.2 分式的四则运算

同分母分式的加法与减法

分母相同的分式相加或相减，只需将各分式的分子相加或相减，其分母不变，然后将所得结果加以化简。

例题 1

化简下列各式：

(a) $\frac{2}{a}+\frac{3}{a}-\frac{1}{a}$

(b) $\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a+b}$

(c) $\frac{2}{x-y}+\frac{1}{y-x}$

(d) $\frac{3x+1}{2x-2}-\frac{4}{2x-2}$

解： (a)
$$\frac{2}{a}+\frac{3}{a}-\frac{1}{a}=\frac{2+3-1}{a}=\frac{4}{a}$$

(b)
$$\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a+b}=\frac{2a+2b}{a+b}=\frac{2(a+b)}{a+b}=2$$

(c)
$$\frac{2}{x-y}+\frac{1}{y-x}=\frac{2}{x-y}-\frac{1}{x-y}=\frac{2-1}{x-y}=\frac{1}{x-y}$$

(d) $$\frac{3x+1}{2x-2}-\frac{4}{2x-2}=\frac{3x+1-4}{2x-2}$$
$$=\frac{3x-3}{2x-2}$$
$$=\frac{3(x-1)}{2(x-1)}$$
$$=\frac{3}{2}$$

随堂练习 3

化简下列各式：

1. $\frac{1}{b}-\frac{2}{b}+\frac{3}{b}$

2. $\frac{x}{x^2-4}+\frac{2}{x^2-4}$

练习 12.2a

化简下列各式：

1. $\frac{2}{3a}+\frac{4}{3a}$

2. $\frac{9}{b}-\frac{5}{b}-\frac{3}{b}$

3. $\frac{2x-y}{x+y}+\frac{2y-x}{x+y}$

4. $\frac{1}{x-2y}+\frac{1}{2y-x}$

5. $\frac{5}{2a-2b}+\frac{1}{2b-2a}$

6. $\frac{x+1}{x^2+4}+\frac{1}{x^2+4}$

7. $\frac{x+4}{2x+4}-\frac{2}{2x+4}$

8. $\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}$

9. $\frac{x-2y}{x^2-y^2}-\frac{2x-y}{x^2-y^2}$

10. $\frac{x+2y}{x^2-y^2}-\frac{2x+y}{y^2-x^2}$

11. $\frac{2x+1}{x+1}-\frac{3x+4}{x+1}+\frac{2x+3}{x+1}$

12. $\frac{x-y}{x+y+z}+\frac{y-z}{x+y+z}+\frac{z-x}{x+y+z}$

异分母分式的加法与减法

分母不相同的分式相加或相减，须先通分，然后再相加或相减。

例题 2

化简下列各式：

(a) $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}$　　(b) $\frac{x-2y}{3y}+\frac{4x+5y}{9y}$

(c) $\frac{2}{3x}-\frac{3}{2y}$　　(d) $\frac{x+3}{x+4}-\frac{x+1}{x+2}$

解： (a)
$$\begin{aligned}\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}&=\frac{a-2}{(a+2)(a-2)}+\frac{a+2}{(a+2)(a-2)}\\&=\frac{a-2+a+2}{(a+2)(a-2)}\\&=\frac{2a}{(a+2)(a-2)}\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{x-2y}{3y}+\frac{4x+5y}{9y}&=\frac{3(x-2y)+4x+5y}{9y}\\&=\frac{7x-y}{9y}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\frac{2}{3x}-\frac{3}{2y}&=\frac{4y}{6xy}-\frac{9x}{6xy}\\&=\frac{4y-9x}{6xy}\end{aligned}$$

(d) $$\frac{x+3}{x+4}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+4)}-\frac{(x+1)(x+4)}{(x+2)(x+4)}$$
$$=\frac{(x^2+5x+6)-(x^2+5x+4)}{(x+2)(x+4)}$$
$$=\frac{2}{(x+2)(x+4)}$$

例题 3

化简下列各式:

(a) $$\frac{7}{x^2+x-12}-\frac{6}{x^2+2x-8}$$

(b) $$\frac{y-1}{y^2+2y+1}-\frac{y}{y^2-1}+\frac{1}{y+1}$$

解: (a) $$\frac{7}{x^2+x-12}-\frac{6}{x^2+2x-8}=\frac{7}{(x-3)(x+4)}-\frac{6}{(x-2)(x+4)}$$
$$=\frac{7(x-2)-6(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+4)}$$
$$=\frac{x+4}{(x-2)(x-3)(x+4)}$$
$$=\frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

(b) $$\frac{y-1}{y^2+2y+1}-\frac{y}{y^2-1}+\frac{1}{y+1}=\frac{y-1}{(y+1)^2}-\frac{y}{(y+1)(y-1)}+\frac{1}{y+1}$$
$$=\frac{(y-1)^2-y(y+1)+(y+1)(y-1)}{(y+1)^2(y-1)}$$
$$=\frac{y^2-2y+1-y^2-y+y^2-1}{(y+1)^2(y-1)}$$
$$=\frac{y^2-3y}{(y+1)^2(y-1)}$$

随堂练习 4

化简下列各式:

1. $\dfrac{1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x^2-x-6}$

2. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{2}{x^2-1}$

练习 12.2b

化简下列各式:

1. $\dfrac{a+1}{2a}-\dfrac{2a-3}{3a}$

2. $\dfrac{1}{2b}+\dfrac{2}{3b}-\dfrac{3}{4b}$

3. $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}$

4. $\dfrac{4}{5(m-n)}+\dfrac{2}{3(n-m)}$

5. $\dfrac{p}{q}+\dfrac{p}{p-q}$

6. $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}$

7. $\dfrac{x-4}{x-2}-\dfrac{x-6}{x-5}$

8. $\dfrac{2}{3}-\dfrac{2a}{3a+b}$

9. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)(x+3)}$

10. $\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b^2}{a(b-a)}$

11. $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^2+x}$

12. $\dfrac{1}{y-2}-\dfrac{3}{y^2+y-6}$

13. $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$

14. $\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{1}{(1+x)^2}$

15. $\dfrac{a+1}{2a-8}-\dfrac{a+2}{12-3a}$

16. $\dfrac{1}{a^2+a-6}-\dfrac{1}{a^2-a-12}$

17. $\dfrac{3}{2-2x}+\dfrac{4}{3+3x}-\dfrac{3}{1-x^2}$

18. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{1}{x^2-4x+3}$

19. $\dfrac{3}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2-x}$

20. $\dfrac{1}{(x-y)(y-z)}+\dfrac{1}{(y-z)(z-x)}+\dfrac{1}{(z-x)(x-y)}$

分式的乘法

两个分式相乘，是把两式的分子相乘，作为乘积的分子，把两式的分母相乘，作为乘积的分母。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}$$

如果两式的分子与分母间有公因式，可先约简，然后才相乘。

例题 4

化简下列各式：

(a) $\dfrac{2z}{5x}\times\dfrac{7}{3y}$

(b) $\dfrac{c}{ab}\times\dfrac{a}{bc}\times\dfrac{b}{ca}$

(c) $\dfrac{2d^2}{2d-e}\times\dfrac{2de-e^2}{6de}$

(d) $\dfrac{a^2-16}{a^2-2a-3}\times\dfrac{a-3}{a^2-5a+4}$

解： (a) $\frac{2z}{5x}\times\frac{7}{3y}=\frac{2z\times7}{5x\times3y}$

$=\frac{14z}{15xy}$

(b) $\frac{c}{ab}\times\frac{a}{bc}\times\frac{b}{ca}=\frac{1}{abc}$

(c) $\frac{2d^2}{2d-e}\times\frac{2de-e^2}{6de}=\frac{2d^2\times e(2d-e)}{(2d-e)\times6de}$

$=\frac{d}{3}$

(d) $\frac{a^2-16}{a^2-2a-3}\times\frac{a-3}{a^2-5a+4}=\frac{(a+4)(a-4)}{(a+1)(a-3)}\times\frac{a-3}{(a-1)(a-4)}$

$=\frac{a+4}{(a+1)(a-1)}$

分式的除法

分式的除法，是把除式的分子与分母对调，再与被除式相乘。

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}$$

例题 5

化简下列各式：

(a) $\dfrac{21x^2}{32y}\div\dfrac{3x}{8y^2}$　　(b) $\dfrac{a^2+ab}{ab-b^2}\div\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

解： (a) $\dfrac{21x^2}{32y}\div\dfrac{3x}{8y^2}=\dfrac{21x^2}{32y}\times\dfrac{8y^2}{3x}$

$$=\frac{7xy}{4}$$

(b) $\dfrac{a^2+ab}{ab-b^2}\div\dfrac{(a+b)^2}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2+ab}{ab-b^2}\times\dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$

$$=\frac{a(a+b)}{b(a-b)}\times\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{a}{b}$$

例题 6

化简 $\dfrac{6x^2-ax-2a^2}{ax-a^2}\div\dfrac{3x-2a}{x-a}\div\dfrac{x}{a}$。

解： $\dfrac{6x^2-ax-2a^2}{ax-a^2}\div\dfrac{3x-2a}{x-a}\div\dfrac{x}{a}=\dfrac{(3x-2a)(2x+a)}{a(x-a)}\times\dfrac{x-a}{3x-2a}\times\dfrac{a}{x}$

$$=\frac{2x+a}{x}$$

例题 7

化简 $\frac{a-b}{a-c}\div\left(\frac{b-a}{b-c}\div\frac{c-a}{b-c}\right)$。

解：
$$\begin{aligned}\frac{a-b}{a-c}\div\left(\frac{b-a}{b-c}\div\frac{c-a}{b-c}\right)&=\frac{a-b}{a-c}\div\left(\frac{b-a}{b-c}\times\frac{b-c}{c-a}\right)\\&=\frac{a-b}{a-c}\div\frac{b-a}{c-a}\\&=\frac{a-b}{a-c}\times\frac{c-a}{b-a}\\&=1\end{aligned}$$

例题 8

化简 $\frac{2x}{7y^2}\div\frac{8}{3xy}\times\frac{4y}{9x^2}$。

解：
$$\begin{aligned}\frac{2x}{7y^2}\div\frac{8}{3xy}\times\frac{4y}{9x^2}&=\frac{2x}{7y^2}\times\frac{3xy}{8}\times\frac{4y}{9x^2}\\&=\frac{1}{21}\end{aligned}$$

随堂练习 5

化简下列各式：

1. $\frac{3a}{4b}\times\frac{16b}{9a^2}$
2. $\frac{3ab^2}{5b^3c}\div\frac{9a^2b}{15b^2c^2}$
3. $\frac{x-1}{x^2+x}\div\frac{x+1}{x^2-x}\div\frac{x}{x^2-1}$

练习 12.2c

化简下列各式：

1. $\frac{14b^2c}{12ad}\times\frac{6a^2d^3}{7ab^2}$

2. $\frac{7y^2}{5xy^3}\div\frac{14xy}{25y^2}$

3. $\frac{bc}{a^2}\times\frac{ca}{b^2}\times\frac{ab}{c^2}$

4. $\frac{3z}{4xy}\times\frac{2x}{3yz}\div\frac{zx}{2y}$

5. $\frac{a^2-9}{a^2-a-6}\times\frac{a^2+2a}{a^2}$

6. $\frac{a+b}{b}\times\frac{ab}{2a+2b}$

7. $\frac{x^2+xy}{x^2-y^2}\div\frac{xy}{2x-2y}$

8. $\frac{xy}{3x-6y}\times\frac{4x-8y}{x^2y}$

9. $\frac{a^2+ab}{a^2-ab}\times\frac{ab^2+b^3}{a^3+a^2b}$

10. $\frac{m^2-mp}{p^2-pq}\div\frac{p^2-mp}{mp-mq}$

11. $\frac{p-q}{p-r}\times\frac{q-r}{q-p}\times\frac{r-p}{r-q}$

12. $\frac{14a^2-7a}{12a^3+24a^2}\div\frac{2a-1}{a^2+2a}$

13. $\frac{x^2-5x+6}{x}\div\frac{x-2}{x^2-3x}$

14. $\frac{a^2-b^2}{x^2-36}\div\frac{b-a}{x+6}$

15. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+9x+20}\times\frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6}$

16. $\frac{y^2-2y-24}{y^2-16}\times\frac{y^2-y-12}{y^2+6y+9}$

17. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+4}\div\frac{x^2+6x+5}{x^2+7x+12}$

18. $\frac{2x}{x^2+4x+3}\times\frac{x^2+3x+2}{x-3}\div(x+2)$

19. $\left(\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}\right)\times\frac{x-2}{4x}$

20. $\left(1-\frac{c}{c-1}\right)\times\left(\frac{1}{c}-c\right)$

21. $\left(1-\frac{c}{a+c}\right)\times\left(\frac{1}{a}+\frac{c}{a^2}\right)$

22. $\left(1+\frac{b}{a}\right)\div\left(1+\frac{a}{b}\right)$

23. $\frac{x}{x-y}\div\left(\frac{xy}{x^2-y^2}\div\frac{x}{x+y}\right)$

24. $\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\div\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$

12.3 繁分式

在分式 $\frac{A}{B}$ 中，如果分子 A 或分母 B 又是分式，那么 $\frac{A}{B}$ 就叫做繁分式。例如 $\frac{\frac{a}{b}}{c}$，$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$，$\frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$ 都是繁分式。

例题 1

化简 $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$。

解：

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$$

$$=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

$$=\frac{ad}{bc}$$

例题 2

化简下列各式：

(a) $\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x}$　　(b) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}$

解： (a) $\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x}=\dfrac{\dfrac{x^2+1}{x}}{x}$

$=\dfrac{x^2+1}{x}\times\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

或 $\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x}=\dfrac{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\cdot x}{x\cdot x}$

$=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

(b) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x^2-1}{x}}$

$=\dfrac{x+1}{x}\times\dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{1}{x-1}$

或 $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\cdot x}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cdot x}$

$=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{1}{x-1}$

例题 3

化简下列各式：

(a) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+1}{\dfrac{a-b}{a+b}+1}$　　　(b) $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$

解： (a)
$$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}+1}{\dfrac{a-b}{a+b}+1}=\frac{\dfrac{a+b+a-b}{a-b}}{\dfrac{a-b+a+b}{a+b}}$$
$$=\frac{2a}{a-b}\times\frac{a+b}{2a}$$
$$=\frac{a+b}{a-b}$$

(b)
$$1-\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1-\frac{1}{\dfrac{x+1}{x}}$$
$$=1-\frac{x}{x+1}$$
$$=\frac{x+1-x}{x+1}$$
$$=\frac{1}{x+1}$$

随堂练习 6

化简下列各式：

1. $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}}{\dfrac{a+b}{b}}$　　　2. $\dfrac{\dfrac{b}{a}-1}{1-\dfrac{a}{b}}$

练习 12.3

化简下列各式：

1. $\dfrac{\dfrac{1}{x}}{y}$

2. $\dfrac{\dfrac{m}{n}}{\dfrac{p}{q}}$

3. $\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{b+\dfrac{1}{a}}$

4. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}$

5. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{a+b}$

6. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

7. $\dfrac{\dfrac{x+y}{z}}{\dfrac{x^2-y^2}{xz}}$

8. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

9. $\dfrac{1-\dfrac{a-b}{a+b}}{1+\dfrac{a-b}{a+b}}$

10. $\dfrac{\dfrac{m}{m+n}+\dfrac{n}{m-n}}{\dfrac{m}{m-n}-\dfrac{n}{m+n}}$

12.4 分式方程式

含有分式的方程式就叫做分式方程式。例如，

$\dfrac{2}{x}+3=0$，$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+2}=1$都是分式方程式。

解分式方程式

一般上，解分式方程式，可将方程式的每一项都乘以分母的最低公倍式，然后解这个不含分母的方程式。根据分式的定义，分母不能为零，因此，分式方程式所解得的根，应加以检验。如果所求得的根，会使某一项的分母为零，则此根应舍弃。这个不适合原方程式的根叫做增根。

例题 1

解下列各方程式：

(a) $\frac{2}{x+1}+3=0$　　(b) $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x-2}=0$

解： (a) $\frac{2}{x+1}+3=0$

分母的 L.C.M. $=x+1$

方程式的每一项都乘以 $x+1$ 得

$$2+3(x+1)=0$$
$$2+3x+3=0$$
$$3x=-5$$
$$x=-\frac{5}{3}$$

经检验，$x=-\frac{5}{3}$ 不会使原方程式分母为0。

∴ 原方程式的解为 $x=-\frac{5}{3}$。

(b) $\dfrac{2}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}=0$

分母的 L.C.M. $=(x-2)(x-3)$

方程式的每一项都乘以 $(x-2)(x-3)$ 得

$$2(x-2)-3(x-3)=0$$
$$2x-4-3x+9=0$$
$$x=5$$

经检验，$x=5$ 不会使原方程式分母为0。

∴ 原方程式的解为 $x=5$。

例题 2

解下列各方程式：

(a) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}=\dfrac{x+13}{x(x-1)}$

(b) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{6}{x^2-1}$

解： (a) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{x-1}=\dfrac{x+13}{x(x-1)}$

方程式的每一项都乘以 $x(x-1)$ 得

$$3(x-1)+6x=x+13$$
$$3x-3+6x=x+13$$
$$8x=16$$
$$x=2$$

经检验，$x=2$ 不会使原方程式分母为0。

∴ 原方程式的解为 $x=2$。

(b) $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}=\frac{6}{x^2-1}$

方程式的每一项都乘以$(x+1)(x-1)$得

$$2(x-1)+3(x+1)=6$$
$$2x-2+3x+3=6$$
$$5x=5$$
$$x=1$$

经检验，$x=1$为增根。

∴ 原方程式无解。

例题 3

解方程式$1+\frac{3}{x-1}=\frac{2}{x-3}$。

解： $1+\frac{3}{x-1}=\frac{2}{x-3}$

方程式的每一项都乘以$(x-1)(x-3)$得

$$(x-1)(x-3)+3(x-3)=2(x-1)$$
$$x^2-4x+3+3x-9=2x-2$$
$$x^2-3x-4=0$$
$$(x+1)(x-4)=0$$
$$x+1=0 \quad \text{或} \quad x-4=0$$
$$x=-1 \qquad\qquad x=4$$

经检验，$x=-1$或$x=4$都不会使原方程式分母为0。

∴ 原方程式的解为$x=-1$，4。

例题 4

解方程式$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{x^2-4}+\dfrac{2}{2-x}=1$。

解：

$$\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}=1$$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2}{x-2}=1$$

方程式的每一项都乘以$(x+2)(x-2)$得

$$x-2+4x-2(x+2)=(x+2)(x-2)$$

$$5x-2-2x-4=x^2-4$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$x-1=0 \quad 或 \quad x-2=0$$

$$x=1 \qquad\qquad x=2$$

经检验，$x=2$为增根。

∴ 原方程式的解为$x=1$。

随堂练习 7

解下列各方程式：

1. $\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{x+1}$
2. $\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{1}{x-1}$
3. $\dfrac{12}{x-5}+\dfrac{12}{x+5}=1$
4. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{9}{20}$

练习 12.4

解下列各方程式：

1. $1+\frac{1}{2x+1}=0$

2. $\frac{2}{x}=\frac{9}{2x}-1$

3. $\frac{3}{x}=\frac{5}{2x-7}$

4. $\frac{2}{3x-1}=\frac{1}{5x-11}$

5. $\frac{x}{x-5}=\frac{x-2}{x-6}$

6. $\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x+6}=1$

7. $\frac{1}{y-1}+\frac{2}{1-y}=\frac{3}{y}$

8. $\frac{1}{3x}-\frac{1}{3x+3}=\frac{1}{4x}$

9. $\frac{1}{2z-3}=\frac{5}{z}+\frac{3}{2z^2-3z}$

10. $\frac{x}{7}=\frac{7}{x}$

11. $x-2=\frac{3}{x}$

12. $\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{x+1}$

13. $\frac{1}{x}=\frac{1}{x+5}+\frac{1}{10}$

14. $x-\frac{6}{x}+\frac{5}{2}=0$

15. $\frac{1}{x+1}+\frac{4}{3x+6}=\frac{2}{3}$

16. $\frac{1}{1+x}-\frac{2}{3-3x}=\frac{7}{12}$

17. $\frac{x+2}{x+3}=\frac{2x-3}{3x-7}$

18. $\frac{3}{x-2}+\frac{8}{x+3}=2$

19. $\frac{1}{2}-\frac{4}{x+1}=\frac{4}{x^2+x}$

20. $\frac{1-x}{x}+\frac{x}{1-x}=\frac{5}{2}$

21. $\frac{x-1}{x^2-5x+6}+\frac{x}{x-2}=\frac{2}{x-3}$

22. $\frac{3}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2}{x+4}$

23. $\frac{x^2-2}{x^2-3x+2}+\frac{4}{x-2}=\frac{3}{x-1}$

24. $\frac{2}{x-2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{11}{x^2+x-6}$

12.5 应用问题

例题 1

一个水槽有甲、乙两条进水管，单开甲管注满水槽所需的时间比单开乙管多10小时。如果两管齐开，则12小时可将水槽注满。问单开一条水管，各需多少时间才能将水槽注满？

解： 设单开乙管注满水槽需x小时，

则单开甲管注满水槽需$(x+10)$小时，

甲管每小时可注满水槽的$\frac{1}{x+10}$，

乙管每小时可注满水槽的$\frac{1}{x}$，

两管齐开，每小时可注满水槽的$\frac{1}{12}$。

依题意可得：

$$\frac{1}{x+10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{12}$$
$$12x+12(x+10)=x(x+10)$$
$$x^2-14x-120=0$$
$$(x+6)(x-20)=0$$

$x+6=0$ 或 $x-20=0$

$x=-6$ $x=20$

$x=-6$不合题意，而$x=20$不会使原方程式分母为0。

$\therefore$ 原方程式的解为$x=20$。当$x=20$，$x+10=30$。

单开甲管需30小时才能将水槽注满；单开乙管需20小时才能将水槽注满。

例题 2

一小艇从甲地顺流航行24公里到乙地，然后逆流回到甲地，航行时间共6小时。已知水流速度是每小时3公里，求小艇在静水中的速度。

解： 设小艇在静水中的速度为每小时x公里，
则小艇顺流的速度是每小时$(x+3)$公里，
小艇逆流的速度是每小时$(x-3)$公里。
依题意可得：

$$\frac{24}{x+3}+\frac{24}{x-3}=6$$
$$\frac{4}{x+3}+\frac{4}{x-3}=1$$
$$4(x-3)+4(x+3)=(x+3)(x-3)$$
$$4x-12+4x+12=x^2-9$$
$$x^2-8x-9=0$$
$$(x+1)(x-9)=0$$
$$x+1=0 \quad 或 \quad x-9=0$$
$$x=-1 \qquad\qquad x=9$$

$x=-1$不合题意，而$x=9$不会使原方程式分母为0。
∴ 原方程式的解为$x=9$。
小艇在静水中的速度为每小时9公里。

随堂练习 8

有一工程，子良独做所需时间是汶良的两倍。如果两人合做，则6天可以完成。问子良独做需多少天完成？

练习 12.5

1. 一水槽有两条进水管。两管齐开，6小时可将水槽注满。单开甲管，注满水槽所需的时间比单开乙管多5小时。问单开一条水管，各需多少时间才能将水槽注满?
2. 山路长4公里，锦发下山的速度比上山的速度每小时快1公里。已知上山和下山来回一趟共需6小时，求锦发上山的速度。
3. 一小艇从甲地逆流航行3公里到乙地，然后顺流回到甲地，航行时间共1小时20分钟。若此艇在静水中的速度为每小时6公里，求水流的速度。
4. 有一工程，启春独做可比鸿聪独做少4天完成。今启春、鸿聪两人合做3天后，再由启春独做3天完成。问两人独做，各需多少天完成?
5. 民胜以RM 1200买进一批玻璃瓶，搬运中打破了4个。若每个玻璃瓶的售价较原价多RM 10，全部玻璃瓶卖出后，他共获利RM 100。问民胜共买进多少个玻璃瓶?
6. 有一工程，俊杰独做较杰伦独做所需的时间少9小时。若两人合做，则需20小时完成。问两人独做各需几小时完成?

总复习题 12

化简下列各式：(1至22)

1. $\dfrac{8x^2y^3z}{12xy^2z^2}$
2. $\dfrac{p^2-2pq}{2q^2-pq}$
3. $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2+xy-2y^2}$
4. $\dfrac{3a^3b-3ab^3}{a^2+ab}$
5. $\dfrac{a^2+3a-ab-3b}{a^2-9}$
6. $\dfrac{6x}{2x-3y}+\dfrac{9y}{3y-2x}$
7. $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$
8. $\dfrac{1}{2a-2b}-\dfrac{1}{3a-3b}$

9. $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{7}{2x^2-x-6}$

10. $\dfrac{1}{x^2+x-12}-\dfrac{1}{x^2-2x-3}$

11. $\dfrac{b-c}{bc}+\dfrac{c-a}{ca}+\dfrac{a-b}{ab}$

12. $\dfrac{2}{a^2-2a}-\dfrac{3}{a^2-3a}+\dfrac{2}{a^2-5a+6}$

13. $\dfrac{2}{a-1}+\dfrac{1}{(a-1)^2}+\dfrac{2}{(a-1)^3}$

14. $\dfrac{5}{2(y+1)}-\dfrac{1}{10(y-1)}+\dfrac{1}{5(y^2-1)}$

15. $\dfrac{4}{1+x}-\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{6x}{x^2-1}$

16. $\dfrac{12a^2}{b^2}\times\dfrac{b}{3c}\div\dfrac{c^2}{ab}$

17. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}\times\dfrac{1}{xy+y^2}$

18. $\dfrac{y^2+y-6}{y+1}\div\dfrac{y+3}{2y^2+y-1}$

19. $\left(1-\dfrac{c}{d}\right)\div\left(1-\dfrac{d}{c}\right)$

20. $\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right)\div\dfrac{x^2-1}{3x}$

21. $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{b}}+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{a}}$

22. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{1-\dfrac{x+1}{x-3}}}$

解下列各方程式：(23至32)

23. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{1}{x}=1$

24. $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{3}{x+1}=1$

25. $\dfrac{x+4}{3x-8}=\dfrac{x+5}{3x-7}$

26. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{5}{x-2}$

27. $\dfrac{x}{2x-5}+\dfrac{5}{5-2x}=1$

28. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{2x+3}=\dfrac{3x+6}{2x^2+7x+6}$

29. $\dfrac{7}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{6}{x^2-1}$

30. $\dfrac{3}{x+2}+1=2x$

31. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+5}=\dfrac{1}{4}$

32. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{4}{x-3}$

33. 一水槽有两条进水管，单开甲管比两管齐开需多2小时才可注满水槽。单开乙管比单开甲管需多6小时才可注满水槽。问两管齐开需多少小时才可注满这个水槽？

34. 一小艇从甲地顺流航行36公里到乙地，然后逆流回到甲地。已知逆流航行的时间比顺流航行的时间多1小时，且小艇在静水中的速度是每小时15公里，求水流的速度。

35. 有一工程，哲宇独做可比宇航独做提早5天完成。若两人合做，则可比哲宇独做提早4天完成。问两人独做各需多少天完成?

36. 家安、哲宁两人同时从一市镇出发，骑脚踏车45公里到另一市镇。家安的速度比哲宁每小时快1公里，结果家安比哲宁提早半小时到达。试分别求出他们骑脚踏车的速度。

13 公式

学习目标

- 理解公式
- 能进行公式主项的更换及解相关应用问题



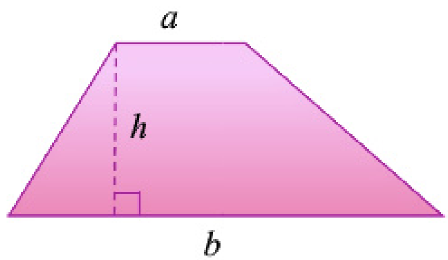
13.1 公式

公式可以用来表示两个或多个数量之间的关系。以下是一些我们学过的公式：

1. 三角形的面积公式：$A=\frac{1}{2}bh$，其中b是底，h是高。
2. 弧长公式：$l=\frac{\theta}{360^\circ}\times 2\pi r$，其中$\theta$是圆心角，$r$是半径。
3. 扇形面积公式：$S=\frac{\theta}{360^\circ}\times \pi r^2$，其中$\theta$是圆心角，$r$是半径。
4. n边形内角和的公式：$s=(n-2)\times 180^\circ$。
5. 行程问题的公式：$v=\frac{s}{t}$，其中v是速度，s是距离，t是时间。
6. 毕氏定理：$c^2=a^2+b^2$，其中c是直角三角形斜边的长，a与b是两个直角边的长。

例题 1

写出梯形面积的公式。



解： 设梯形的上底为a，下底为b，高为h，

则梯形的面积$A=\frac{1}{2}(a+b)\times h$。

例题 2

一水箱里有 m 公升的水，已知每小时有 k 公升的水从箱底一小洞流出。t 小时后，此水箱里还剩下 P 公升的水。

(a) 写出 P 的公式；

(b) 当 $m=2500$， $k=15$， $t=5$ 时，求 P。

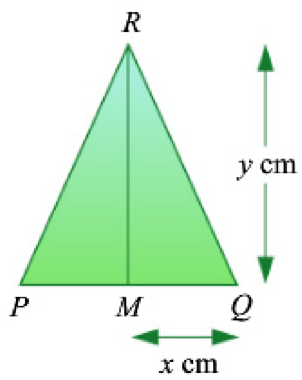
解： (a) 依题意得 $P=m-kt$

(b) 当 $m=2500$， $k=15$， $t=5$ 时，

$$\begin{aligned} P &= 2500-15\times5 \\ &= 2500-75 \\ &= 2425 \end{aligned}$$

练习 13.1

1. 五名男孩的重量分别为 a，b，c，d 及 e 公斤，求他们的平均体重 w。
2. 有一辆重量为 x 吨的货车，当它载了 n 个重 y 吨的箱子后，总重量为 w 吨，写出 w 的公式。
3. 玲玲有 RM z。她共买了 4 本小说和 25 支原子笔。若一本小说的价格是 RM x，一支原子笔的价格是 RM y，写出 z 的公式。
4. 右图所示为一个等腰三角形，高为 y cm，M 是 PQ 的中点。以 x，y 表示三角形的面积 A。



5. 有一个边长为 x cm 的正八边形及一个边长为 k cm 的等边三角形，写出两个图形的周长之和 P。

13.2 公式主项的更换

若一个公式是以 x，y 表示 P，例如，$P=3x-2y$，我们就说此公式的主项是 P。

通过移项的变换，我们可以更换公式的主项。

注意

主项的字母必须单独写在等号的左边。而右边不能再出现此字母。

例题 1

将下列各式重新写成以括号中指定的字母为主项的式子。

(a) $s=\dfrac{d}{t}$ (t)　　(b) $v=u+at$ (a)

(c) $I=\dfrac{PRT}{100}$ (R)　　(d) $F=\dfrac{9}{5}C+32$ (C)

解： (a)

$$s=\frac{d}{t}$$
$$t=\frac{d}{s}$$

(b)

$$v=u+at$$
$$at=v-u$$
$$a=\frac{v-u}{t}$$

(c)

$$I=\frac{PRT}{100}$$
$$PRT=100I$$
$$R=\frac{100I}{PT}$$

(d) $F=\frac{9}{5}C+32$

$\frac{9}{5}C=F-32$

$C=\frac{5}{9}(F-32)$

例题 2

已知n边形的内角和公式为$s=(n-2)\times180^\circ$，以s表示n。

解： $s=(n-2)\times180^\circ$

$n-2=\frac{s}{180^\circ}$

$n=\frac{s}{180^\circ}+2$

例题 3

已知$s=\frac{1}{2}t(u+v)$，

(a) 当$t=6$，$u=7$，$v=13$时，求s；

(b) 以s，t及v表示u；

(c) 当$s=75$，$t=30$，$v=20$时，求u的值。

解： (a) $s=\frac{1}{2}t(u+v)$

当$t=6$，$u=7$，$v=13$时，

$s=\frac{1}{2}\times6\times(7+13)$

$=60$

(b) $$s=\frac{1}{2}t(u+v)$$

$$u+v=\frac{2s}{t}$$

$$u=\frac{2s}{t}-v$$

(c) 当 $s=75$， $t=30$， $v=20$ 时，

$$\begin{aligned}u&=\frac{2s}{t}-v\\&=\frac{2\times 75}{30}-20\\&=-15\end{aligned}$$

随堂练习 1

将下列各式写成以括号中指定的字母为主项的式子。

1. $s=\dfrac{d}{t}$ (d)
2. $3x+z=y$ (x)
3. $\dfrac{a}{2c}+\dfrac{b}{4}=1$ (a)
4. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=1$ (a)

练习 13.2a

将下列各式写成以括号中指定的字母为主项的式子 (1 至 10)。

1. $C=\pi d$ (d)
2. $4y-2e=k$ (y)
3. $k=\dfrac{y}{v}$ (v)
4. $V=lbh$ (l)
5. $p=\dfrac{x}{n}-k$ (x)
6. $p=2(l+b)$ (l)

7. $x=\dfrac{p-4q}{y}$ (q)

8. $C=\dfrac{5}{9}(F-32)$ (F)

9. $A=P(1+\dfrac{r}{100})$ (r)

10. $v=u+at$ (a)

11. 已知 $5V=\dfrac{RT}{8S}$，以R，S，V表示T。

12. 已知 $\dfrac{r}{s+k}=\dfrac{u}{t}$，
    (a) 以u，s，t及r表示k；
    (b) 当 $u=t=5$，$s=12$ 及 $r=4$ 时，求k的值。

例题 4

将下列各式写成以x为主项的式子：

(a) $a=\sqrt{x}$

(b) $m=x^2$

(c) $v=\sqrt{u^2+2ax}$

(d) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3}$

解： (a)
$$a=\sqrt{x}$$
$$a^2=x$$
$$x=a^2$$

(b)
$$m=x^2$$
$$x=\pm\sqrt{m}$$

(c)
$$v=\sqrt{u^2+2ax}$$
$$v^2=u^2+2ax$$
$$2ax=v^2-u^2$$
$$x=\frac{v^2-u^2}{2a}$$

(d) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3}$

$3y=\sqrt{x}$

$x=(3y)^2$

$x=9y^2$

例题 5

已知 $y=\dfrac{2-x}{3+2x}$，以 y 表示 x。

解:

$$y=\frac{2-x}{3+2x}$$
$$3y+2xy=2-x$$
$$2xy+x=2-3y$$
$$x(2y+1)=2-3y$$
$$x=\frac{2-3y}{2y+1}$$

例题 6

已知 $\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{f}$。

(a) 以 v 及 f 表示 u。

(b) 当 $v=30$，$f=25$ 时，求 u。

解： (a) $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{f}-\frac{1}{v}$$

$$\frac{1}{u}=\frac{v-f}{vf}$$

$$u=\frac{vf}{v-f}$$

(b) 当 $v=30$， $f=25$ 时，

$$u=\frac{30\times 25}{30-25}$$
$$=150$$

注意

$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$ 不可写成 $u+v=f$ 。

例题 7

已知 $x=t-2$， $y=\frac{-t+8}{3}$， 以 y 表示 x。

解： 由 $y=\frac{-t+8}{3}$ 得 $3y=-t+8$

$$t=8-3y$$

代入 $x=t-2$ 得 $x=(8-3y)-2$

$$=6-3y$$

随堂练习 2

将下列各式写成以括号中指定的字母为主项的式子 (1至4)。

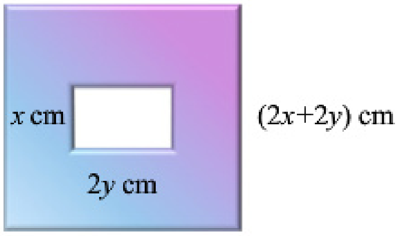
1. $2x=\sqrt[3]{y}$ (y)
2. $3y^2-5=3z$ (y)
3. $M=3\pi\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ (x)
4. $\dfrac{4b-5}{b+c}=2$ (b)
5. 已知 $x=t^2-2$， $y=4t+5$， 以 x 表示 y。

练习 13.2b

将下列各式写成以括号中指定的字母为主项的式子。(1至12)

1. $A=\dfrac{1}{2}h(a+b)$ (a)
2. $v=a^2b$ (a)
3. $a^2+b^2=c^2$ $(b>0)$ (b)
4. $s=ut+\dfrac{1}{2}gt^2$ (u)
5. $\sqrt{v}=\dfrac{1}{4}u$ (v)
6. $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$ $(r,\quad h>0)$ (r)
7. $3a^2-2=b$ (a)
8. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{c}=1$ (a)
9. $\dfrac{2c}{\sqrt{s}-1}=3$ (s)
10. $m=n\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$ (a)
11. $y=\dfrac{x-4}{1-5x}$ (x)
12. $x=\dfrac{ab+1}{a-b}$ (b)
13. 已知 $a=\dfrac{5b}{3c-4}$ 。
    (a) 以 a， b 表示 c。
    (b) 当 $a=-1$， $b=2$ 时， 求 c。

14. 右图为一个正方形，边长是$(2x+2y)$ cm。若在正方形内剪去一个长$2y$ cm及宽x cm的长方形，
(a) 以x及y表示着色部分的面积A；
(b) 当$x=2$，$y=3$时，求A。



15. 一推销员的底薪为RM1200。每售出一台手提电脑他另可获RM50的佣金。若该名推销员在一个月内售出m台手提电脑，
(a) 求此推销员该月的收入I；
(b) 当$m=30$时，I的值是多少？

16. 已知圆柱体的体积$V=\pi r^2h$，
(a) 以V及h表示r，
(b) 当$V=704$，$h=14$时，求r的值。(取$\pi=\frac{22}{7}$)

17. 已知$a=2x^2+1$，$y=\frac{1}{5}a$，以x表示y。

总复习题 13

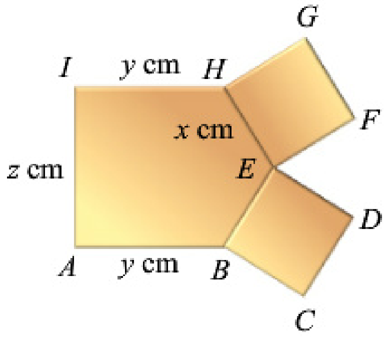
1. 三个数a，b，c的平均为x，以a，b，c表示x。
2. 在一个补习班，x个男同学的平均年龄是c岁，y个女同学的平均年龄是a岁，写出全班同学的总岁数S。
3. 将下列各式写成以括号中指定的字母为主项的式子：

(a) $2xz-9y^2+x^2=z^2$ (y)　　(b) $\frac{3k}{\sqrt[3]{10j}}=L$ (j)

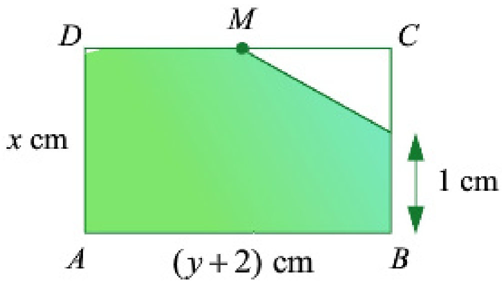
(c) $E=\frac{9nk}{3k+n}$ (n)　　(d) $a^3b^2-4=c^2+4$ (b)

4. 已知$s=3x^3-2$，$t=2s$，以t表示x。

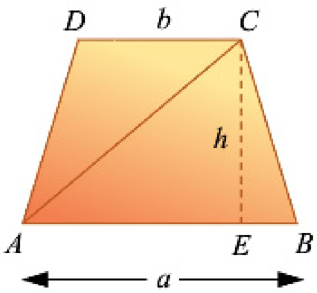
5. 右图中，$BCDE$ 与 $EFGH$ 是两个全等的正方形。
   (a) 以 x，y 及 z 表示图形的周长 P；
   (b) 当 $x=12$，$y=15$，$z=20$ 时，求 P。



6. 下图为一个长方形 $ABCD$，M 是 DC 的中点。若着色部分的面积是 62 cm^2，以 x 表示 y。



7. 右图为一梯形，其两个平行边分别为 a 及 b，高为 h。
   (a) 写出三角形ABC及ACD的面积公式。据此，证明梯形的面积公式是 $A=\frac{1}{2}h(a+b)$；
   (b) 将此公式的主项更换成h；
   (c) 当 $A=40.5$，$a=12.4$，$b=5.6$ 时，求 h。



8. 已知 $x=3a+b$，$y=a-5b$，$L=4a-3b$，
   (a) 以 x，y 表示 L；
   (b) 当 $x=1$，$y=11$ 时，求 L 的值。

14 不等式

学习目标

- 掌握不等式的基本性质
- 能解一元一次不等式
- 能解一元一次不等式组
- 能解不等式的应用问题



我们在初中一学过用不等号表示数字间不相等的关系。在这一章，我们将学习如何找出满足某个不等式的所有数。

14.1 不等式的基本性质

我们注意到 $4<8$，$4-8<0$。更一般而言，

若 $a<b$，则 $a-b<0$。

反之，若 $a-b<0$，则 $a<b$。

同理，若 $a>b$，则 $a-b>0$。

反之，若 $a-b>0$，则 $a>b$。

另外，我们也观察到 $4<6$，$6<8$，∴ $4<8$。由此可得

若 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$。

我们继续用以下的例子来探讨不等式的基本性质。

在不等式 $7<12$ 的两边都加上 3，

左式 $=7+3$ $=10$　　右式 $=12+3$ $=15$

∴ $7+3<12+3$

在不等式 $7<12$ 的两边同时减去 4，

左式 $=7-4$ $=3$　　右式 $=12-4$ $=8$

∴ $7-4<12-4$

因此，我们知道

> 不等式的两边都加上或减去同一个数，
> 不等号的方向不变。

即

> 若 $a<b$，则 $a+c<b+c$。
> 若 $a<b$，则 $a-c<b-c$。

随堂练习 1

在下列的空格中，填上适当的数字或不等号。

(a) 5 ___ 9

$5+(-2)=$ ___

$9+(-2)=$ ___

$5+(-2)$ ___ $9+(-2)$

(b) 5 ___ -3

$5-(-3)=$ ___

$-3-(-3)=$ ___

$5-(-3)$ ___ $-3-(-3)$

我们再看看乘除的情况。

将不等式 $-8<-4$ 的两边都乘以2，

左式 $=-8\times2$
$=-16$

右式 $=-4\times2$
$=-8$

$\therefore\ -8\times2<-4\times2$

将不等式 $-8<-4$ 的两边都除以2，

左式 $=-8\div2$
$=-4$

右式 $=-4\div2$
$=-2$

$\therefore\ -8\div2<-4\div2$

因此，我们知道

> 不等式的两边都乘以或除以同一个正数，
> 不等号的方向不变。

在上述的结果中，我们特别强调所乘的数必须是正数。如果乘以负数会有不同的结果吗？

将不等式 $-8 < -4$ 的两边都乘以 -2，

左式 $= -8 \times (-2)$
$= 16$

右式 $= -4 \times (-2)$
$= 8$

$\because \ 16 > 8$

$\therefore \ -8 \times (-2) > -4 \times (-2)$

将不等式 $-8 < -4$ 的两边都除以 -2，

左式 $= -8 \div (-2)$
$= 4$

右式 $= -4 \div (-2)$
$= 2$

$\because \ 4 > 2$

$\therefore \ -8 \div (-2) > -4 \div (-2)$

因此，我们知道

> 不等式的两边都乘以或除以同一个负数，
> 不等号的方向须改变。

综合以上所述，不等式有以下的性质：

> 若 $a < b$ 且 $c > 0$，则 $ac < bc$。
> 若 $a < b$ 且 $c < 0$，则 $ac > bc$。

> 若 $a < b$ 且 $c > 0$，则 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$。
> 若 $a < b$ 且 $c < 0$，则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$。

随堂练习 2

在下列的空格中，填上适当的数字或不等号。

(a) 5 ___ 9

$5\times(-2)=$ ___

$9\times(-2)=$ ___

$5\times(-2)$ ___ $9\times(-2)$

(b) 6 ___ -9

$6\div(-3)=$ ___

$-9\div(-3)=$ ___

$6\div(-3)$ ___ $-9\div(-3)$

例题 1

设 $a>b$，用不等号连结下列各题中的两式：

(a) $a-3$， $b-3$

(b) $2a$，$2b$

(c) $-a$， $-b$

解： (a) $a>b$，不等式两边同时减 3，不等号方向不变。

$\therefore\ a-3>b-3$

(b) $a>b$，不等式两边同时乘以正数 2，不等号方向不变。

$\therefore\ 2a>2b$

(c) $a>b$，不等式两边同时乘以负数 -1，不等号方向须改变。

$\therefore\ -a<-b$

例题 2

若 $a<b$，用不等号连结下列各题中的两式：

(a) $a-3$，$b-2$　　(b) $3a+b$，$2a+2b$

解： (a) 由 $a<b$ 得 $a-2<b-2$，

另外 $a-3=(a-2)-1<a-2$。

$\therefore\ a-3<b-2$

(b) $3a+b-(2a+2b)=a-b$

已知 $a<b$，即 $a-b<0$。

$\therefore\ 3a+b-(2a+2b)<0$

即 $3a+b<2a+2b$。

思考题

若 $a<b$，你能确定 $2a$ 与 $3b$ 的大小关系吗？

随堂练习 3

若 $a>b$，试比较 $2a-2$ 与 $2b-3$ 的大小。

练习 14.1

1. 设 $a<b$，用不等号连结下列各题中的两式：

(a) $a+5$，$b+5$　　(b) $-8a$，$-8b$

(c) $\frac{a}{4}$，$\frac{b}{4}$　　(d) $3a$，$3b$

(e) $a-4$，$b-4$　　(f) $-\frac{1}{2}a$，$-\frac{1}{2}b$

2. 设 $a<b$，比较 $2a+3$ 与 $2b+3$ 的大小。
3. 设 $a>b$，比较 $a+3$ 与 $b+2$ 的大小。

4. 找出一组 a 及 b，满足

(a) $a<b$ 且 $a+5<b+2$

(b) $a<b$ 且 $a+5>b+2$

14.2 一元一次不等式

观察下面的不等式：

$$3x<9,\quad 2x-7\leq 5,\quad \frac{2y-1}{3}-y>0$$

这些不等式只含有一个未知数，而且未知数的次方是1，这样的不等式叫做一元一次不等式。满足一元一次不等式的数叫做不等式的解。一个不等式所有的解所组成的集合叫做该不等式的解集。解一元一次不等式就是求该不等式的解集。

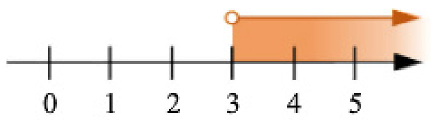
我们可以应用不等式的基本性质来解一元一次不等式。

例题 1

解不等式 $x-1>2$，并用数线表示其解集。

解：

$$x-1>2$$
$$x-1+1>2+1$$
$$x>2+1$$
$$\therefore\quad x>3$$



补充资料

不等式的解 $x>3$，可以看作是集合 $\{x\,|\,x\in \boldsymbol{R},\ x>3\}$ 的简写。

例题 2

解不等式$3x+1\le 10$，并用数线表示其解集。

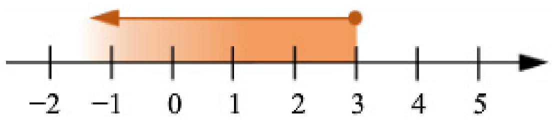
解： $3x+1\le 10$

$3x\le 10-1$

$3x\le 9$

$x\le \frac{9}{3}$

$\therefore\quad x\le 3$



例题 3

解不等式$3-2x\le 7$，并用数线表示其解集。

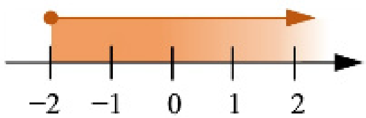
解： $3-2x\le 7$

$-2x\le 7-3$

$-2x\le 4$

$\frac{-2x}{-2}\ge \frac{4}{-2}$

$\therefore\quad x\ge -2$



注意

在解不等式的时候，虽然我们也可以像解方程式那样移项，但是当两边都乘以或除以负数时，必须改变不等号的方向。

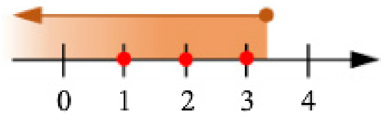
例题 4

求不等式 $3x-10\le 0$ 的正整数解。

解： $3x-10\le 0$

$3x\le 10$

$x\le \dfrac{10}{3}$



$\therefore$ 所求的正整数解是1，2，3 。

例题 5

求不等式 $3(1-x)<2(x+9)$ 的最小整数解。

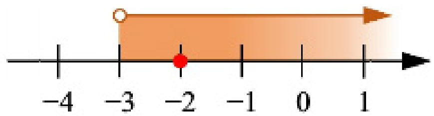
解： $3(1-x)<2(x+9)$

$3-3x<2x+18$

$3-18<2x+3x$

$-15<5x$

$x>-3$



$\therefore$ 所求的最小整数解是 -2。

随堂练习 4

1. 解下列不等式，并用数线表示其解集：

   (a) $15>5-y$　　　(b) $3(x-2)\le -2$

2. 一个整数的三倍减 6 不大于 20。这个整数最大可以是多少？

例题 6

解下列各不等式：

(a) $\frac{1}{2}x \geq 1+\frac{1}{3}x$

(b) $\frac{1}{6}(2-x)-3 \geq \frac{x}{10}$

解： (a)

$$\frac{1}{2}x \geq 1+\frac{1}{3}x$$

$$6\times\frac{1}{2}x \geq 6\times\left(1+\frac{1}{3}x\right)$$

$$3x \geq 6+2x$$

$$\therefore \quad x \geq 6$$

(b)

$$\frac{1}{6}(2-x)-3 \geq \frac{x}{10}$$

$$30\times\left(\frac{1}{6}(2-x)-3\right) \geq 30\times\frac{x}{10}$$

$$5(2-x)-90 \geq 3x$$

$$10-5x-90 \geq 3x$$

$$-80 \geq 8x$$

$$\therefore \quad x \leq -10$$

随堂练习 5

解不等式 $\frac{2m}{3}-\frac{1}{3} > \frac{3m}{4}$。

例题 7

解下列不等式：

(a) $x \geq x-1$　　　　(b) $y < y-1$

解： (a) $\because\ x \geq x-1$，$\therefore 0 \geq -1$。

这个不等式对于任何数 x 都正确。

$\therefore$ 不等式的解集为 $\boldsymbol{R}$。

(b) 由 $y < y-1$ 得 $0 < -1$。无论 y 是什么数，这个不等式都不正确。

$\therefore$ 解集 $=\phi$。

练习 14.2

解下列各不等式，并用数线表示其解集 (1 至 8)：

1. $x+5 > -7$
2. $y-3 < 4$
3. $3x+2 < x-4$
4. $4x-3 > 5x+6$
5. $2x+5 < 4x-7$
6. $-4x < 12$
7. $-2x \geq -6$
8. $3m+1 < -1+m$

解下列各不等式 (9 至 22)：

9. $x > 1-x$
10. $2x-3 > 2(x-2)$
11. $x < x+1$
12. $x \geq x+1$
13. $x-1 \leq 4(x-1)$
14. $5(6-y)+1 < y$
15. $5y-5(y-1) \geq 3y+5$
16. $3[x-2(x-1)] < -3x$
17. $\frac{2}{3}(2x-3) \leq 5$
18. $\frac{1}{3}(t+2) < t+\frac{1}{2}$

19. $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}<x$

20. $\frac{2x-1}{5}>1$

21. $\frac{2x-3}{3}-\frac{x-1}{2}>\frac{x-5}{6}$

22. $\frac{2x-1}{3}+1<\frac{x+1}{3}$

23. 求下列各不等式的正整数解：

(a) $3x+4\geq 4(x-2)$

(b) $34-3x\geq 4$

24. a 取什么值时，$3-2a$ 的值大于1？

25. 求不等式 $8>3x-4$ 的最大整数解。

26. 求不等式 $15-8x\leq 2x+30$ 的最小整数解。

27. 有没有实数 满足不等式 $x>2x$？如果有，求解集。

14.3 一元一次不等式组

在生活上，我们所面对的问题往往必须满足多于一个限制条件，这些限制条件可以用不等式表示。由几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做一元一次不等式组，如

$$\begin{cases} x>1 \\ x<6 \end{cases},\quad \begin{cases} x+3<5x-1 \\ x>3x-2 \end{cases},\quad \begin{cases} 4(x+5)<2 \\ 3x+1\geq 2 \\ x>0 \end{cases}$$

都是不等式组。解不等式组就是要找出同时满足不等式组中各个不等式的所有的数。解不等式组时，我们可以先分别求各个不等式的解，然后再找这些解的交集。

思考题

为什么我们要找这些解的交集？

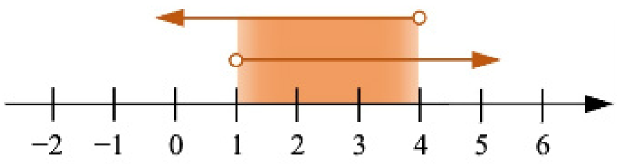
例题 1

解下列各不等式组：

(a) $\begin{cases} x>1 \\ x<4 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x>1 \\ x\geq 4 \end{cases}$

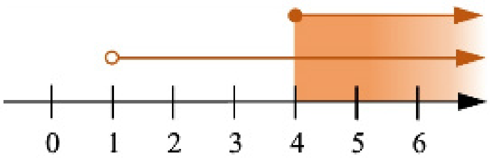
(c) $\begin{cases} x<1 \\ x<4 \end{cases}$　　(d) $\begin{cases} x\leq 1 \\ x>4 \end{cases}$

解： (a) 在数线上分别标示出不等式 $x>1$ 及 $x<4$ 的解集。



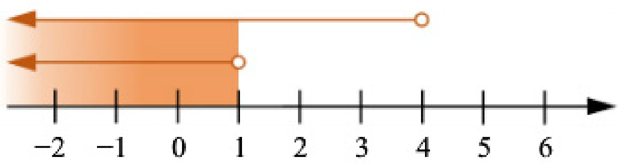
从上图可以看出，能同时满足两个不等式的数介于1与4之间，即不等式组的解为 $1<x<4$。

(b) 在数线上分别标示出不等式 $x>1$ 及 $x\geq 4$ 的解集。



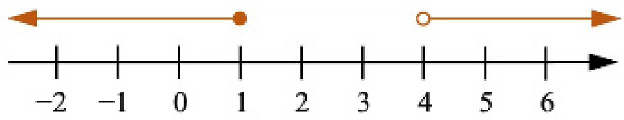
从上图可以看出，能同时满足两个不等式的数大于或等于4，即不等式组的解为 $x\geq 4$。

(c) 在数线上分别标示出不等式 $x<1$ 及 $x<4$ 的解集。



从上图可以看出，能同时满足两个不等式的数都小于1，即不等式组的解为 $x<1$。

(d) 在数线上分别标示出不等式 $x \leq 1$ 及 $x > 4$ 的解集。



从上图可以看出，两个不等式的解集没有交集，也就是说没有任何数同时小于1又大于4，即不等式组无解。

例题 2

解下列各不等式组：

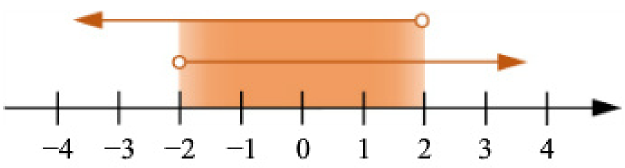
(a) $\begin{cases} x+4>2 \\ x+2<4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x-3<\dfrac{1}{2}(x-3) \\ \dfrac{1}{4}+\left(x-\dfrac{9}{4}\right)\geq\dfrac{x}{2} \end{cases}$

解： (a) $\begin{cases} x+4>2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x+2<4 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

由 (1)，得 $x>-2$

由 (2)，得 $x<2$



$\therefore$ 不等式组的解为 $-2<x<2$。

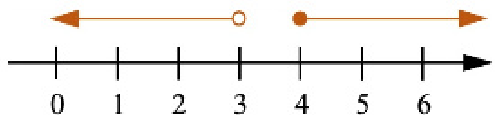
(b) $\begin{cases} x-3<\dfrac{1}{2}(x-3) \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{1}{4}+\left(x-\dfrac{9}{4}\right)\geq\dfrac{x}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

由 (1)，得 $2x-6<x-3$

$x<3$

由 (2)，得 $1+(4x-9)\geq 2x$

$x\geq 4$



∴ 此不等式组无解。

例题 3

解下列各不等式组：

(a) $-1\leq 3x+5<14$　　(b) $x+1\leq 5\leq 2x-3$

解： (a) 原式等同于不等式组

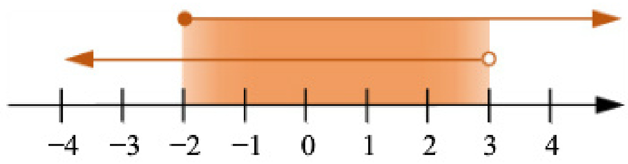
$\begin{cases} -1\leq 3x+5 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 3x+5<14 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

由 (1)，得 $-6\leq 3x$

$-2\leq x$

由 (2)，得 $3x<9$

$x<3$



∴ 此不等式组的解为 $-2\leq x<3$。

(续)　　或

直接应用不等式的性质

$-1 \le 3x + 5 < 14$

$-6 \le 3x < 9$

$\therefore\ -2 \le x < 3$

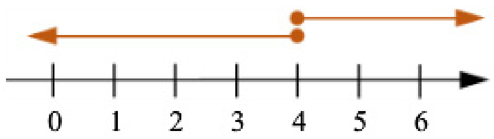
(b) 原式等同于不等式组

$$\begin{cases} x+1 \le 5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ 5 \le 2x-3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

由 (1)，得 $x \le 4$

由 (2)，得 $8 \le 2x$

$x \ge 4$



$\therefore$ 此不等式组的解为 $x = 4$。

随堂练习 6

解下列各不等式组：

1. $\begin{cases} \dfrac{x-4}{5} \ge 1 \\ 2x+3 \ge 11 \end{cases}$

2. $2x < x + 1 < 3$

练习 14.3

解下列各不等式组：

1. $\begin{cases} 2x-1>0 \\ 2+x<0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+1<0 \\ 1-2x\le 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x-3\ge 0 \\ 3x-5\ge 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3-4x\le 0 \\ 2+3x<0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x-3>x-4 \\ 5x+1<4x+3 \end{cases}$

6. $7\le 3x-7<14$

7. $\begin{cases} x+2>0 \\ x-4>0 \\ x-6<0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3-2x\ge 0 \\ -x\le 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x+2\le 0 \\ \dfrac{10+5x}{2}>6x+14 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-(2-3x)\ge 4 \\ \dfrac{x+2}{2}>\dfrac{x+3}{3} \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x-2>3(x+1) \\ \dfrac{x}{2}-1\le 7-\dfrac{3x}{2} \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{5}{3}x<5(4-x) \\ 2(4-x)<\dfrac{x-1}{3} \end{cases}$

13. $\begin{cases} x-\dfrac{x}{2}>\dfrac{x+1}{3} \\ x<1+\dfrac{x+8}{6} \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5}>\dfrac{13-x}{2} \\ \dfrac{7x}{3}<\dfrac{11(x+3)}{6} \end{cases}$

15. $6x-5\le 7x-3\le 6x+3$

16. $3x-2\le 4<5x-1$

14.4 应用问题

例题 1

原子笔每支的价格是90仙，小华有RM 10，问最多能买几支原子笔？

解： 设小华买原子笔 x 支须付 RM $\frac{9}{10}x$。

$$\frac{9}{10}x \leq 10$$

$$x \leq \frac{100}{9}$$

$$x \leq 11\frac{1}{9}$$

∴ 小华最多可买11支原子笔。

例题 2

数学科四次测验的平均分数须达60分才能及格。国山在前三次的测验成绩为48，62及53分，问他在第四次测验至少得考几分才能及格？

解： 设国山在第四次测验得 x 分。

$$\frac{48+62+53+x}{4} \geq 60$$

$$163+x \geq 240$$

$$x \geq 77$$

∴ 他至少得考77分才能及格。

随堂练习 7

元凯的家离学校600公尺。他早上七点十五分出门走路上学，学校七点半上课。若他以匀速步行，则他的速度至少须为多少才不会迟到？

例题 3

一抽水机每小时抽3000公升的水。一池塘的水量估计介于85000公升至90000公升之间。抽干该池塘的水需要多少时间？

解： 设需要 x 小时抽干池塘的水。

依题意，$85000 < 3000x < 90000$

$$\frac{85000}{3000} < x < \frac{90000}{3000}$$

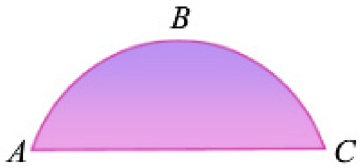
$$28\frac{1}{3} < x < 30$$

∴ 所需的时间介于28小时20分钟与30小时之间。

练习 14.4

1. 华文科五次测验的平均分数须达80分才能列为甲等。志豪在前四次的测验成绩为75，83，70及86分，问他在第五次测验至少得考几分才能得到甲等？
2. 一长方形的长是 $(2x+5)$ cm，宽是8 cm，它的面积小于78 cm^2。若 x 是整数，求 x 的最大可能值。
3. 已知一三角形的底是 $(x+3)$ cm，高是 5 cm，若三角形的面积大于20 cm^2，x 是整数，则 x 的最小可能值是多少？

4. 右图中，若 $\overset{\frown}{ABC}=(3x+5)\text{ cm}$， $AC=(x+12)\text{ cm}$，求 x 的取值范围。



5. 三角形的三个边分别为 $(x+1)\text{ cm}$，$(x-3)\text{ cm}$ 及 12 cm。求 x 的最小整数值。
6. 一菱形的周长小于 120 cm，求它的边长的取值范围。
7. 一双皮鞋的成本是 RM 40，问定价至少是多少，打八折后才不会亏本？
8. 元凯的家离学校 600 公尺。若他每秒行走不超过 0.5 公尺，并在七点半上课前到达学校，问他最迟几点出门？

总复习题 14

解下列各不等式（1 至 10）：

1. $3x+5>2x-1$
2. $2x-3\le 3x-6$
3. $3x-5<1+5x$
4. $3(2x+5)>2(4x+3)$
5. $10-4(x-3)\le 2(x-1)$
6. $\dfrac{x+5}{2}-1<\dfrac{3x+2}{2}$
7. $\dfrac{y+1}{3}-\dfrac{y-1}{2}\ge 6$
8. $\dfrac{13x+7}{4}-\dfrac{5-4x}{3}<1$
9. $x+7<x-5$
10. $x+1<10-(5-x)$

11. 写出满足不等式 $-5<2x\le 7$ 的
    (a) 最大整数
    (b) 最小整数

12. 已知 $\dfrac{1}{2}\le x\le 15\dfrac{1}{2}$，写出 x 的
    (a) 最大值
    (b) 最小值
    (c) 最大整数
    (d) 最小整数

13. 已知$3 \le x \le 5$及$2 \le y \le 9$，求

(a) $x+y$的最大值

(b) $x-y$的最大值

(c) $\frac{x}{y}$的最大值

(d) xy的最小值

解下列各不等式组(14至21)：

14. $\begin{cases} 3x-9 > x+1 \\ x+2 > 5 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x+6 > 4x \\ 15-9x < 10-4x \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{x}{2} < \frac{x+1}{5} \\ \frac{2x-1}{5} < \frac{x+1}{2} \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x < x+2 \\ 15-9x < 10-4x \end{cases}$

18. $\begin{cases} \frac{1}{2}x < x+1 \\ x+1 < 3(x-1) \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2(1-x) > x-1 \\ x-1 > \frac{1}{2}(x-7) \end{cases}$

20. $x+3 \le 2x+2 \le 3x+1$

21. $5-x < 7 \le x-5$

22. 丽萍出版2000本小说的成本为四万令吉，她打算以每本RM 30的价格卖出一部分的小说，并将其余的捐赠给图书馆。问她至少须卖出多少本才不会亏本？

23. 小强的数学测验分数比小明的高10分，他们的分数之和不超过180分，问小强的分数最高可能是多少？

24. 若$-4 \le x \le 3$且$-2 \le y \le 7$，求$x^2 - y^2$的

(a) 最大值

(b) 最小值

25. 若$-8 \le x \le -1$且$2 \le y \le 7$，求$\frac{y}{x}$的

(a) 最大值

(b) 最小值

26. 判断以下的推论是否正确：

若$a > b$且$c > d$，则$ac > bd$。

名词对照

7 圆与扇形

圆心	centre of circle	弧长	arc length
半径	radius	圆心角	central angle
直径	diameter	扇形	sector
圆的周长	circumference	优扇形	major sector
弧	arc	劣扇形	minor sector
优弧	major arc	扇形面积	area of sector
劣弧	minor arc		

8 毕式定理

毕氏定理	Pythagoras' Theorem	距离公式	distance formula

9 集合论

集合	set	子集	subset
元素	element	相离集	disjoint sets
范恩图	Venn diagram	联集	union of sets
空集	empty set	交集	intersection of sets
有限集	finite set	差集	difference between sets
无限集	infinite set	泛集	universal set
基数	cardinal number	余集	complementary set
等集	equal sets		

11 一元二次方程式与一元二次函数

一元二次方程式	quadratic equation in one variable
根	root
因式分解法	solving by factorization
配方法	solving by completing the square
公式法	solving by formula
一元二次函数	quadratic function
图像	graph
抛物线	parabola

12 分式

分式	fraction	繁分式	complex fraction
最简分式	simplest fraction	分式方程式	fractional equation

13 公式

公式	formula	主项	subject

14 不等式

不等式	inequality
解集	solution set
一元一次不等式	linear inequality in one variable
一元一次不等式组	system of linear inequalities in one variable

7 圆与扇形

随堂练习 1 (第 3 页)

3. 8 cm
4. 2.5 cm
5. (a) 半径：OA，OB；直径：AB
   (b) 半径：OA，OB
   (c) 半径：OB，OC，OD；直径：CD

随堂练习 2 (第 7 页)

1. 25.12 cm
2. 5.25 cm

练习7.1a (第 7 页)

1.

	半径	直径	圆的周长
(a)	7 m	14 m	44 m
(b)	5.6 m	11.2 m	35.2 m
(c)	140 mm	280 mm	880 mm
(d)	63 cm	126 cm	396 cm
(e)	28 mm	56 mm	176 mm
(f)	14.7 cm	29.4 cm	92.4 cm

2. (a) 66 cm (b) 22 cm
   (c) 44 cm
3. 220 cm
4. 31.4 mm
5. 154 cm
6. 20π mm
7. 198 cm
8. 25 cm
9. 31.5 cm
10. 1250 圈
11. 639.6 m
12. 36 cm
13. 35.7 cm
14. 90 cm
15. 34π mm

随堂练习 3 (第 12 页)

1. 346.5 cm
2. 1256 cm^2

练习7.1b (第 12 页)

1.

	半径	直径	圆的面积
(a)	7 m	14 m	154 m^2
(b)	5.6 m	11.2 m	98.56 m^2
(c)	140 mm	280 mm	61600 mm^2
(d)	2.1 m	4.2 m	13.86 m^2
(e)	10.5 cm	21 cm	346.5 cm^2
(f)	10 mm	20 mm	$314\frac{2}{7}$ mm^2

2. (a) 346.5 cm^2 (b) 38.5 cm^2
   (c) 154 cm^2
3. 16π cm^2
4. 240.625 cm^2
5. 6 cm
6. 22 cm
7. 22 mm
8. 346.5 cm^2
9. 57 cm^2
10. 344 cm^2
11. 2347 cm^2
12. 54.25 m^2
13. 66 cm^2
14. 13024 m^2
15. 114 cm^2
16. 21.5 cm^2
17. 176 cm，1232 cm^2

随堂练习 4 (第 18 页)

1. 225°
2. 152.8 cm

随堂练习 5 (第 22 页)

1. 60°
2. 58.5π

练习7.2 (第 22 页)

1. (a) 22 cm
   (b) 58 cm，198 cm^2
2. (a) 20π cm
   (b) $(48+20\pi)$ cm，240π cm^2
3. (a) 157 cm
   (b) 217 cm，2355 cm^2

4. (a) $140°$ (b) 396 cm^2

5. (a) 30 cm (b) 1884 cm^2

6. (a) $140°$ (b) 40 cm

7. (a) 27 cm (b) $(54+48\pi)$ cm

8.

	半径	圆心角	弧长	圆的面积
(a)	12 cm	$45°$	3π cm	$18\pi\text{ cm}^2$
(b)	18 mm	$160°$	16π mm	$144\pi\text{ mm}^2$
(c)	15 m	$210°$	17.5π m	$\frac{525}{4}\pi\text{ m}^2$
(d)	6 mm	$300°$	10π mm	$30\pi\text{ mm}^2$
(e)	8 m	$135°$	6π m	$24\pi\text{ m}^2$
(f)	15 cm	$216°$	18π cm	$135\pi\text{ cm}^2$

9. (a) 3.5π cm (b) $15.75\pi\text{ cm}^2$

10. (a) $144\pi\text{ cm}^2$ (b) 12 cm
    (c) 16π cm

11. (a) $150°$ (b) 2310 mm^2

12. (a) $220°$
    (b) $\left(\frac{55}{3}\pi+30\right)$ cm

13. (a) $\left(\frac{35}{3}\pi+18\right)$ cm
    (b) $\frac{105}{2}\pi\text{ cm}^2$

14. (a) 10 cm (b) $(20+35\pi)$ cm

15. 552.29 cm^2 16. 537.5 cm^2

总复习题7 (第 26 页)

1. 15.7 cm

2. (a) $105°$ (b) 21 cm
   (c) 80.5 cm (d) 404.25 cm^2

3. (a) $100°$ (b) 21 cm
   (c) $78\frac{2}{3}$ cm

4. $135°$ 5. 2500 圈

6. (a) 2 : 3 (b) 4 : 9

7. 31 cm，31.5 cm^2

8. 154 cm^2

9. 12π cm，$27\pi\text{ cm}^2$

10. 24 cm^2

11. 84 cm，358 cm^2

12. (a) $\frac{600°}{\pi}$ (b) 60 cm^2

13. 102.8 cm，86 cm^2

14. $54\pi\text{ cm}^2$ 15. $\frac{4-\pi}{\pi}$

16. 64 cm^2 17. 11 cm^2

18. $\frac{5}{4}$

19. 58 cm，77 cm^2

20. 243 cm^2

21. (a) $\left(\frac{76}{5}\pi+4\right)$ cm
    (b) $\frac{243}{343}$

8 毕氏定理

随堂练习 1 (第 35 页)

1. (a) 3 (b) $4\sqrt{5}$

2. (a) 15 (b) 6
   (c) $\sqrt{3}$

练习 8.1a (第 36 页)

1. (a) 5 (b) 13
   (c) 17 (d) $5\sqrt{2}$
   (e) 6 (f) 7
   (g) 5 (h) $\sqrt{39}$
   (i) 8 (j) $2\sqrt{5}$

2. (a) 25 (b) 12
(c) 6 (d) $2\sqrt{61}$
(e) $4\sqrt{10}$ (f) $10\sqrt{3}$

随堂练习 2 （第 38 页）

1. (a) $x=12$， $y=9$
(b) $x=2\sqrt{30}$

练习 8.1b （第 39 页）

1. $y=12$
2. $x=6$
3. $x=12$
4. $y=20$
5. $x=6$
6. $x=4\sqrt{2}$
7. $x=2\sqrt{13}$
8. $x=6\sqrt{5}$
9. $x=12$， $y=9$
10. $x=15$， $y=2\sqrt{26}$
11. $y=\sqrt{119}$
12. $x=5\sqrt{2}$
13. $x=\sqrt{73}$
14. $x=2\sqrt{2}$， $y=2\sqrt{3}$
15. $x=2\sqrt{17}$
16. $x=\sqrt{73}$

随堂练习 3 （第 45 页）

1. $\sqrt{15}$ m
2. 336 cm^2
3. 81 cm^2
4. (a) 13 cm (b) $\sqrt{61}$ cm
(c) $6\sqrt{5}$ cm (d) $\sqrt{205}$ cm

练习 8.1c （第 46 页）

1. (a) $4\sqrt{2}$ cm (b) $2\sqrt{34}$ cm
2. $\sqrt{91}$ m
3. 5 cm
4. 13 km
5. 170 km
6. 34 cm^2
7. $5\sqrt{3}$ cm
8. 13 cm
9. 8 cm
10. 60 cm^2
11. 60 cm^2
12. 24 cm， 168 cm^2
13. $2\sqrt{10}$ cm
14. $DM=15$ cm， $EN=14\frac{2}{17}$ cm
15. (a) 40 (b) 5
16. $\frac{7\sqrt{51}}{10}$
17. 80 cm^2

随堂练习 4 （第 50 页）

1. 是
2. 不是
3. 是
4. 是
5. 不是
6. 是

练习 8.2 （第 51 页）

1. (a) 不是 (b) 是
(c) 是 (d) 是
(e) 不是 (f) 不是

随堂练习 5 （第 54 页）

1. (a) 5 (b) 10
(c) 17 (d) $2\sqrt{13}$

练习 8.3 （第 54 页）

1. (a) $\sqrt{193}$ (b) $\sqrt{37}$
(c) 13 (d) 15
(e) $\sqrt{13}$ (f) 13
(g) $5p$ (h) $\sqrt{53}$ m
5. (a) $PQ=\sqrt{10}$， $QR=\sqrt{10}$， $RS=\sqrt{10}$，
$SP=\sqrt{10}$， $PR=2\sqrt{5}$， $QS=2\sqrt{5}$
(b) 正方形

总复习题 8 (第 55 页)

1. (a) 12 (b) $3\sqrt{13}$
   (c) 25 (d) 10
   (e) $\sqrt{433}$ (f) $2\sqrt{57}$
   (g) $5\sqrt{13}$ (h) $6\sqrt{6}$
   (i) $\sqrt{89}$ (j) $\sqrt{91}$
2. (a) 10 cm (b) 24 cm
   (c) $5\sqrt{2}$ cm
3. 139 cm^2 4. 15 cm
5. $\sqrt{370}$ km 6. $10\sqrt{95}$ km
7. $20\sqrt{11}$ cm^2 8. $60\sqrt{10}$ cm
9. 10 cm
10. $2\sqrt{2}$ cm， $2\sqrt{3}$ cm
11. 5 cm， $\sqrt{29}$ cm
15. 25 cm

9 集合论

随堂练习 1 (第 62 页)

1. $\in$ 2. $\in$
3. $\notin$ 4. $\notin$

练习 9.1a (第 62 页)

1. $\in$ 2. $\in$
3. $\in$ 4. $\notin$
5. $\in$ 6. $\notin$
7. $\in$ 8. $\in$
9. $\in$ 10. $\in$

随堂练习 2 (第 63 页)

1. $\{1,3,9\}$
2. $\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

练习 9.1b (第 64 页)

1. (a) $\{11,22,33,44,55,66,77,88,99\}$
   (b) $\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$
   (c) $\{15,51,24,42,33,60\}$
   (d) $\{23,32,16,61\}$
   (e) $\{4,5,6,7,8,9\}$
   (f) $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$
   (g) $\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,$
   $-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$
2. (a) $\{e,l,m,n,t\}$
   (b) $e\in P$， $s\notin P$
3. (a) $\in$ (b) $\in$
   (c) $\notin$ (d) $\notin$
   (e) $\notin$ (f) $\notin$

随堂练习 3 (第 65 页)

1. $A=\{a,b,c,e\}$
   $B=\{a,b,d,f,h\}$
   $C=\{a,c,d,g,i\}$

随堂练习 4 (第 67 页)

1. 是 2. 不是
3. 是

练习 9.1c (第 68 页)

1. $X=\{0,2,3\}$
   $Y=\{0,1,3,4\}$
   $Z=\{0,1,5\}$

2. (a) $R=\{1,3,4,5\}$

$S=\{1,2,4,6\}$

$T=\{1,2,3,7\}$

(b) 1，4 (c) 1，2

(d) 1，3 (e) 1

3. (a) 不是 (b) 是

(c) 是 (d) 不是

随堂练习 5 （第 70 页）

(a) 有限集；5 (b) 无限集

(c) 无限集

练习 9.2 （第 70 页）

1. 有限集；10 2. 有限集；8
3. 有限集；9 4. 有限集；0
5. 有限集；2 6. 无限集

随堂练习 6 （第 71 页）

1. $\neq$ 2. $=$

随堂练习 7 （第 75 页）

1. (a) 对 (b) 错

(c) 错 (d) 对

(e) 错 (f) 对

2. ϕ，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{1,2\}$，

$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，

$\{3,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，

$\{1,3,4\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2,3,4\}$

3. 8

随堂练习 8 （第 76 页）

是

练习 9.3a （第 76 页）

1. (a) 对 (b) 错

(c) 对 (d) 对

(e) 对 (f) 对

2. 是；是 3. 64

5. (a) $=$ (b) $\neq$

(c) $=$

随堂练习 9 （第 80 页）

(a) $\{2,3,4,5,6\}$

(b) $\{1,2,3,4,5,6\}$

练习 9.3b （第 81 页）

1. (a) $\{1,3,5,7,9,11\}$

(b) $\{1,2,4,8\}$

(c) $\{2,4,6,8,10\}$

(d) $\{a,b,c,d,e,f\}$

2. (a) 31 (b) 36

(c) 54 (d) 58

(e) 75 (f) 74

(g) 89

3. $S\cup R=\{1,2,3,4,5,6\}$，$n(S\cup R)=6$

4. (a) $P=\{1,2,3,4,6,12\}$，$Q=\{1,3,9\}$

(b) $P\cup Q=\{1,2,3,4,6,9,12\}$，

$n(P\cup Q)=7$

随堂练习 10 (第 86 页)

(a) $\{2,4\}$　(b) $\{4\}$

(c) $\{3,4,5\}$　(d) $\{4\}$

(e) $\{2,3,4,5\}$　(f) $\{2,3,4,5\}$

练习 9.3c (第 87 页)

1. (a) $\{5,7\}$　(b) $\{2,4,8\}$
2. (a) 26　(b) 24
   (c) 9　(d) 46
   (e) 6　(f) 39
3. 0
4. $A\cup B=\{3,6,9,12,15,18,21,24\}$,
   $A\cap B=\{6,12,18,24\}$
7. (a) $C\cup(A\cap B)$
   (b) $(A\cap B)\cup(B\cap C)$
   (c) $(A\cap B)\cup C$
8. (a) 86　(b) 25

随堂练习 11 (第 90 页)

$A\setminus B=\phi$

练习 9.3d (第 90 页)

1. (a) $\{e,u\}$　(b) ϕ
   (c) $\{e,i,o,u\}$　(d) $\{b,c\}$
2. (a) $(A\setminus B)\setminus C=\{1\}$,
   $A\setminus(B\setminus C)=\{1,3,4,5\}$
   (b) 不相等
3. 1
4. $A\setminus B=\{4,12\}$, $n(A\setminus B)=2$
5. $S\setminus R=\{1\}$, $n(S\setminus R)=1$

随堂练习 12 (第 94 页)

(a) $\{2,4,5,7,8,10\}$

(b) $\{1,3,4,6,8\}$

(c) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$

(d) $\{4,8\}$

(e) $\{2,4,5,7,8,9,10\}$

练习 9.4 (第 94 页)

1. (a) $\{1,3,5,7,8,9,10,11\}$
   (b) $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$
   (c) $\{1,2,3,4,5,6,8,10,11,12\}$
   (d) $\{8,11\}$
   (e) ϕ
   (f) $\{5,10\}$
2. (a) $\xi=\{1,2,3,4,5,\cdots,18,19,20\}$
   $A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$
   $B=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$
   (b) $A'=\{1,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20\}$
   $(A\cap B)'=\{1,3,4,5,\cdots,20\}$
   $(A\cup B)'=\{1,9,15\}$
3. (a) 10　(b) 3
   (c) 3
4. (a) 32　(b) 22
   (c) 22　(d) 15
   (e) 37

总复习题 9 (第 96 页)

1. $n(A\cup B)=13$，$n(A\cap B)=9$，
   $n(A\setminus B)=0$
2. (a) ϕ　(b) $\{7,8,9\}$
   (c) $\{3,4,5\}$
3. 8
4. (a) 9　(b) 66
5. (a) $A=\{2,3,5,7\}$
   $B=\{2,3,4,6,9\}$
   $C=\{3,5,7,9\}$
   (b) $\{3\}$　(c) 2
6. $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\}$
7. (a) $\xi=\{30,31,32,\cdots,43,44,45\}$，
   $A=\{35,44\}$，$B=\{37,39,45\}$，
   $C=\{33,44\}$
   (b) 1　(c) 10

10 集合论的应用

随堂练习 1 (第 103 页)

2. 30

练习 10.1a (第 103 页)

1. 88　2. 20
3. 25　4. 23，15
5. 10，0

随堂练习 2 (第 107 页)

1. 10 人　2. 14 人

练习 10.1b (第 107 页)

1. 388 位　2. 18 人
3. 11 名　4. 72 人
5. 13 名　6. 12 人
7. (a) 1290 人　(b) 1710 人
8. 330 人　9. 13
10. 12

随堂练习 3 (第 112 页)

1. 5个　2. 5 人
3. 19 人

练习 10.2 (第 113 页)

1. 2 人
2. (a) 9　(b) 4
   (c) 19
3. (a) 20 人　(b) 22 人
4. 43 人
5. (a) 3 名　(b) 3 名
6. 12 名
7. (a) 25 名　(b) 90 名
   (c) 20 名
8. 19　9. 65，40
10. 700 人；350 人

随堂练习 4 (第 120 页)

1. 5 人　2. 4 人

练习 10.3 (第 121 页)

1. (a) 7　(b) 2
2. (a) 10 人　(b) 8 人
3. 11 人

4. (a) 72 人 (b) 88 人
5. (a) 165 人 (b) 55 人
6. (a) 3 (b) 30
7. (a) 15 人 (b) 9 人
8. 8 人
9. (a) 440 人 (b) 550 人
(c) 110 人

总复习题 10 (第 124 页)

1. 88 2. 70
3. 43
4. $n(A\cap B)=42$，$n(A\cup B)=75$
5. 112 位
6. (a) 80 名 (b) 100 名
(c) 40 名
7. (a) 23 人 (b) 5 人
(c) 9 人
8. (a) 49 名 (b) 17 名
(c) 3 名
9. (a) 15 名 (b) 60 名
10. (a) 23 人 (b) 127 人
11. (a) 6 (b) 13

11 一元二次方程式与一元二次函数

随堂练习 1 (第 129 页)

(a) 是 (b) 不是
(c) 不是 (d) 是

随堂练习 2 (第 132 页)

1. $y=9$，$y=-2$
2. $x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{3}{2}$

随堂练习 3 (第 136 页)

1. $x=-1\pm\sqrt{5}$ 2. $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$

随堂练习 4 (第 138 页)

1. $x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{2}$ 2. $x=3\pm\sqrt{6}$

练习 11.1 (第 139 页)

1. $x=\pm\frac{7}{5}$ 2. $x=\pm\frac{1}{2}$
3. $x=8$，$x=-2$
4. $p=5$，$p=-2$
5. $z=5$，$z=-4$
6. $x=\frac{8}{3}$，$x=-1$
7. $t=\frac{1}{2}$，$t=-\frac{2}{5}$
8. $t=4$，$t=-6$
9. $x=1$，$x=-\frac{4}{3}$
10. $x=2$，$x=-4$
11. $x=-1\pm\sqrt{5}$ 12. $z=2\pm\sqrt{3}$
13. $x=\frac{-4\pm\sqrt{46}}{2}$ 14. $x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$
15. $y=\frac{3\pm\sqrt{65}}{4}$ 16. $x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$
17. $x=-1\pm2\sqrt{2}$ 18. $x=4\pm\sqrt{13}$
19. $x=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$ 20. $y=\frac{9\pm\sqrt{57}}{6}$
21. $z=\frac{9\pm\sqrt{33}}{8}$ 22. $x=\frac{1\pm\sqrt{89}}{4}$
23. $x=\frac{7\pm\sqrt{73}}{6}$ 24. $x=2\pm\sqrt{2}$

25. $x=\frac{7}{2}$，$x=-3$

26. $t=\frac{3}{2}$

27. $x=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

28. $x=\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$

29. $y=\frac{-5\pm\sqrt{145}}{3}$

30. $x=\frac{3}{2}$，$x=-2$

31. $x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{3}$

32. $x=4$，$x=\frac{5}{3}$

33. $x=3$，$x=-\frac{7}{2}$

34. $x=-\frac{1}{3}$，$x=3$

练习 11.2 （第 142 页）

1. 14 及 15 或 −14 及 −15
2. 4 cm
3. 7 cm
4. 6
5. 8 米，6 米
6. 1 m
7. 3 行
8. 48 只 或 16 只

练习 11.3 （第 147 页）

	对称轴	顶点坐标
1.	$x=-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4}\right)$
2.	$x=-\frac{5}{2}$	$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$
3.	$x=0$	$(0, 1)$
4.	$x=-1$	$(-1, 8)$

总复习题 11 （第 147 页）

1. $x=1$，$x=-5$

2. $x=\pm\frac{8}{5}$

3. $x=-7$，$x=6$

4. $z=\frac{2}{3}$，$z=\frac{1}{2}$

5. $x=\frac{-9\pm\sqrt{57}}{4}$

6. $x=\frac{-3\pm2\sqrt{6}}{5}$

7. $y=-\frac{1}{2}$，$y=-\frac{7}{2}$

8. $y=-\frac{8}{3}$，$y=5$

9. $x=2$，$x=-\frac{3}{2}$

10. $t=1$，$t=-\frac{4}{3}$

11. 15 cm，8 cm

12. 1 及 −2 或 9 及 6

13. 42 位

14. 15 cm，10 cm 或 20 cm，7.5 cm

	对称轴	顶点坐标
15.	$x=-2$	$(-2, -9)$
16.	$x=-1$	$(-1, 2)$
17.	$x=0$	$(0, -5)$
18.	$x=0$	$(0, 0)$

12 分式

随堂练习 1 （第 153 页）

1. $\frac{2a}{7c}$
2. $\frac{3x}{2y^2}$
3. $-\frac{b}{d}$
4. $\frac{x+y}{y}$

练习 12.1a （第 153 页）

1. $2a$
2. $\frac{3b^2}{4a}$
3. $\frac{2d^2}{3c}$
4. $\frac{3mn}{2}$
5. $-\frac{2}{3}$
6. 1
7. $b-4a$
8. $\frac{6}{4b-9a}$
9. $\frac{x}{y}$
10. $\frac{p+q}{3r}$
11. $\frac{1}{x-y}$
12. $\frac{b}{2c-b}$
13. $2x$
14. $\frac{b+c}{d+e}$
15. $\frac{2x-1}{2}$
16. $\frac{a}{a-b}$
17. $-x-4$
18. $\frac{x+8}{y}$
19. $\frac{a+3}{a+2}$
20. $-\frac{x-3}{x+2}$
21. $\frac{x+3}{x+9}$
22. $\frac{q}{p}$
23. $\frac{x+y}{x+3y}$
24. $\frac{a(x-4)}{x+5}$

随堂练习 2 （第 156 页）

1. $\frac{9b}{6ab}$，$\frac{4a}{6ab}$
2. $\frac{5xy}{30x^2y}$，$\frac{3x}{30x^2y}$，$\frac{2y}{30x^2y}$
3. $\frac{b^2}{ab(a+b)}$，$\frac{a^2}{ab(a+b)}$

练习 12.1b （第 156 页）

1. $\frac{a^2}{abc}$，$\frac{b^2}{abc}$
2. $\frac{4b^2}{6a^2b^2}$，$\frac{a}{6a^2b^2}$
3. $\frac{3y}{6x^2y^2}$，$\frac{2x}{6x^2y^2}$
4. $\frac{z^2}{xyz}$，$\frac{x^2}{xyz}$，$\frac{y^2}{xyz}$
5. $\frac{b(a-b)}{(a-b)^2}$，$\frac{a}{(a-b)^2}$
6. $-\frac{4}{2x-2y}$，$\frac{1}{2x-2y}$
7. $\frac{x^2+2x}{x^2-4}$，$\frac{2}{x^2-4}$
8. $\frac{x^2+4}{(x+2)(x^2+4)}$，$\frac{x(x+2)}{(x+2)(x^2+4)}$
9. $\frac{bp}{ab(p-q)}$，$\frac{-aq}{ab(p-q)}$
10. $\frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)}$，$\frac{4(x+3)}{(x+3)(x-3)}$
11. $\frac{x-2}{(x+1)(x-1)(x-2)}$，

    $\frac{x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

12. $\frac{(y+5)(y-5)}{(y-5)(y+6)(y-1)}$,

$\frac{(y+6)^2}{(y-5)(y+6)(y-1)}$

13. $\frac{(m+1)(m-2)}{(m+1)(m-1)(m+2)(m-2)}$,

$\frac{(m-1)(m+2)}{(m+1)(m-1)(m+2)(m-2)}$,

$\frac{(m+1)(m-1)}{(m+1)(m-1)(m+2)(m-2)}$

14. $\frac{x(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$,

$\frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$,

$\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

随堂练习 3 （第 158 页）

1. $\frac{2}{b}$
2. $\frac{1}{x-2}$

练习 12.2a （第 158 页）

1. $\frac{2}{a}$
2. $\frac{1}{b}$
3. 1
4. 0
5. $\frac{2}{a-b}$
6. $\frac{x+2}{x^2+4}$
7. $\frac{1}{2}$
8. $a+b$
9. $-\frac{1}{x-y}$
10. $\frac{3}{x-y}$
11. $\frac{x}{x+1}$
12. 0

随堂练习 4 （第 161 页）

1. $\frac{-2}{(x-1)(x+2)(x-3)}$
2. $\frac{3}{(x+1)(x-2)}$

练习 12.2b （第 161 页）

1. $-\frac{a-9}{6a}$
2. $\frac{5}{12b}$
3. $\frac{1}{(x+2)(x+3)}$
4. $\frac{2}{15(m-n)}$
5. $\frac{p^2}{q(p-q)}$
6. $\frac{8x}{(x+2)(x-2)}$
7. $-\frac{x-8}{(x-2)(x-5)}$
8. $\frac{2b}{3(3a+b)}$
9. $\frac{x+5}{(x-1)(x+3)}$
10. $\frac{a+b}{a}$
11. $\frac{1}{x^2(x+1)}$
12. $\frac{y}{(y-2)(y+3)}$
13. $\frac{4}{(x+2)(x-2)}$
14. $\frac{3+x}{(1+x)^2(1-x)}$
15. $\frac{5a+7}{6(a-4)}$
16. $\frac{-2}{(a-2)(a+3)(a-4)}$
17. $-\frac{1}{6(x+1)}$
18. $\frac{1}{(x-1)(x-3)}$
19. $\frac{3x+2}{x(x+1)(x-1)}$
20. 0

随堂练习 5 （第 165 页）

1. $\frac{4}{3a}$
2. $\frac{c}{a}$
3. $\frac{(x-1)^3}{x(x+1)}$

练习 12.2c （第 166 页）

1. cd^2
2. $\frac{5}{2x^2}$
3. 1
4. $\frac{1}{xyz}$
5. $\frac{a+3}{a}$
6. $\frac{a}{2}$
7. $\frac{2}{y}$
8. $\frac{4}{3x}$
9. $\frac{b^2(a+b)}{a^2(a-b)}$
10. $-\frac{m^2}{p^2}$
11. -1
12. $\frac{7}{12}$
13. $(x-3)^2$
14. $-\frac{a+b}{x-6}$
15. $\frac{x+1}{x+5}$
16. $\frac{y-6}{y+3}$
17. $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+5)}$
18. $\frac{2x}{(x+3)(x-3)}$
19. $\frac{1}{x+2}$
20. $\frac{1+c}{c}$
21. $\frac{1}{a}$
22. $\frac{b}{a}$
23. $\frac{x}{y}$
24. $\frac{a+b}{ab}$

随堂练习 6 （第 169 页）

1. $\frac{ab}{(a+b)(a-b)}$
2. $\frac{b}{a}$

练习 12.3 （第 170 页）

1. $\frac{y}{x}$
2. $\frac{mq}{np}$
3. $\frac{a}{b}$
4. $\frac{a+b}{a-b}$
5. $\frac{1}{ab}$
6. $\frac{ab}{a+b}$
7. $\frac{x}{x-y}$
8. $\frac{x+1}{2x+1}$
9. $\frac{b}{a}$
10. 1

随堂练习 7 （第 174 页）

1. $x=2$
2. $x=5$
3. $x=-1$， $x=25$
4. $x=-\frac{5}{9}$， $x=4$

练习 12.4 （第 175 页）

1. $x=-1$
2. $x=\frac{5}{2}$
3. $x=21$
4. $x=3$
5. $x=10$
6. $x=2$
7. $y=\frac{3}{4}$
8. $x=\frac{1}{3}$
9. $z=\frac{4}{3}$
10. $x=-7$， $x=7$
11. $x=-1$， $x=3$
12. $x=-2$， $x=1$
13. $x=-10$， $x=5$
14. $x=-4$， $x=\frac{3}{2}$
15. $x=-\frac{3}{2}$， $x=2$
16. $x=-\frac{1}{7}$， $x=3$
17. $x=-1$， $x=5$
18. $x=-\frac{1}{2}$， $x=5$
19. $x=8$

20. $x=\frac{1}{3}$，$x=\frac{2}{3}$

21. $x=1$

22. $x=-6$，$x=4$

23. $x=-1$，$x=0$

24. $x=3$

随堂练习 8 (第 177 页)

18 天

练习 12.5 (第 178 页)

1. 甲管需 15 小时，乙管需 10 小时
2. 每小时 1 公里
3. 每小时 3 公里
4. 启春：8 天，鸿聪：12 天
5. 30 个
6. 俊杰：36 小时，杰伦：45 小时

总复习题 12 (第 178 页)

1. $\frac{2xy}{3z}$
2. $-\frac{p}{q}$
3. $\frac{x-y}{x+2y}$
4. $3b(a-b)$
5. $\frac{a-b}{a-3}$
6. 3
7. $\frac{4ab}{(a+b)(a-b)}$
8. $\frac{1}{6(a-b)}$
9. $\frac{2}{2x+3}$
10. $-\frac{3}{(x+1)(x-3)(x+4)}$
11. 0
12. $\frac{1}{(a-2)(a-3)}$
13. $\frac{2a^2-3a+3}{(a-1)^3}$
14. $\frac{12}{5(y+1)}$
15. $\frac{1}{1+x}$
16. $\frac{4a^3}{c^3}$
17. $\frac{1}{y(x-y)}$
18. $(y-2)(2y-1)$
19. $-\frac{c}{d}$
20. $\frac{3(x+1)}{x-1}$
21. $\frac{a+b}{ab+1}$
22. $\frac{4}{3x+3}$
23. $x=\frac{1}{2}$
24. $x=8$
25. $x=6$
26. $x=\frac{1}{3}$
27. $x=0$
28. $x=-1$
29. $x=3$
30. $x=-\frac{5}{2}$，$x=1$
31. $x=-11$，$x=3$
32. $x=-1$，$x=7$
33. 4 小时
34. 每小时 3 公里
35. 哲宇：10 天，宇航：15 天
36. 家安：每小时 10 公里，
    哲宁：每小时 9 公里

13 公式

练习 13.1 (第 183 页)

1. $w=\frac{a+b+c+d+e}{5}$
2. $w=x+ny$
3. $z=4x+25y$
4. $A=xy$
5. $P=8x+3k$

随堂练习 1 (第 186 页)

1. $d=st$
2. $x=\frac{y-z}{3}$
3. $a=\frac{c(4-b)}{2}$
4. $a=\frac{b}{b+1}$

练习 13.2a (第 186 页)

1. $d=\frac{c}{\pi}$
2. $y=\frac{k+2e}{4}$
3. $v=\frac{y}{k}$
4. $\ell=\frac{V}{bh}$
5. $x=n(p+k)$
6. $\ell=\frac{p}{2}-b$
7. $q=\frac{p-xy}{4}$
8. $F=\frac{9C}{5}+32$
9. $r=\frac{100(A-P)}{P}$
10. $a=\frac{v-u}{t}$
11. $T=\frac{40VS}{R}$
12. (a) $k=\frac{rt}{u}-s$ (b) -8

随堂练习 2 (第 190 页)

1. $y=8x^3$
2. $y=\pm\sqrt{\frac{3z+5}{3}}$
3. $x=\frac{M^2}{9\pi^2}y$
4. $b=\frac{2c+5}{2}$
5. $y=\pm4\sqrt{x+2}+5$

练习 13.2b (第 190 页)

1. $a=\frac{2A}{h}-b$
2. $a=\pm\sqrt{\frac{v}{b}}$
3. $b=\sqrt{c^2-a^2}$
4. $u=\frac{s}{t}-\frac{1}{2}gt$
5. $v=\frac{1}{16}u^2$
6. $r=\sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$
7. $a=\pm\sqrt{\frac{b+2}{3}}$
8. $a=\frac{bc}{c-b}$
9. $s=\left(\frac{2c}{3}+1\right)^2$
10. $a=\frac{bn^3}{m^3}$
11. $x=\frac{y+4}{5y+1}$
12. $b=\frac{xa-1}{x+a}$
13. (a) $c=\frac{4a+5b}{3a}$ (b) -2
14. (a) $A=4x^2+6xy+4y^2$
    (b) 88 cm^2
15. (a) $I=1200+50m$
    (b) 2700
16. (a) $r=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ (b) 4
17. $y=\frac{1}{5}(2x^2+1)$

总复习题 13 (第 191 页)

1. $x=\frac{a+b+c}{3}$
2. $S=cx+ay$
3. (a) $y=\pm\sqrt{\frac{2xz+x^2-z^2}{9}}$
   (b) $j=\frac{27k^3}{10L^3}$
   (c) $n=\frac{3kE}{9k-E}$
   (d) $b=\pm\sqrt{\frac{c^2+8}{a^3}}$
4. $x=\sqrt[3]{\frac{t+4}{6}}$
5. (a) $P=z+2y+6x$
   (b) 122
6. $y=\frac{246-6x}{3x+1}$

7. (a) $\Delta ABC=\frac{1}{2}ah$，$\Delta ACD=\frac{1}{2}bh$

(b) $h=\frac{2A}{a+b}$

(c) 4.5

8. (a) $L=\frac{17x+13y}{16}$

(b) 10

14 不等式

随堂练习 1 (第 195 页)

(a) <；3；7；<

(b) >；8；0；>

随堂练习 2 (第 197 页)

(a) <；−10；−18；>

(b) >；−2；3；<

随堂练习 3 (第 198 页)

$2a-2>2b-3$

练习 14.1 (第 198 页)

1. (a) $a+5<b+5$ (b) $-8a>-8b$

(c) $\frac{a}{4}<\frac{b}{4}$ (d) $3a<3b$

(e) $a-4<b-4$ (f) $-\frac{1}{2}a>-\frac{1}{2}b$

2. $2a+3<2b+3$
3. $a+3>b+2$
4. (a) $a=1$，$b=6$

(b) $a=1$，$b=3$

随堂练习 4 (第 201 页)

1. (a) $y>-10$ (b) $x\le\frac{4}{3}$
2. 8

随堂练习 5 (第 202 页)

$m<-4$

练习 14.2 (第 203 页)

1. $x>-12$
2. $y<7$
3. $x<-3$
4. $x<-9$
5. $x>6$
6. $x>-3$
7. $x\le 3$
8. $m<-1$
9. $x>\frac{1}{2}$
10. $\boldsymbol{R}$
11. $\boldsymbol{R}$
12. ϕ
13. $x\ge 1$
14. $y>\frac{31}{6}$
15. $y\le 0$
16. ϕ
17. $x\le\frac{21}{4}$
18. $t>\frac{1}{4}$
19. $x>\frac{2}{3}$
20. $x>3$
21. $\boldsymbol{R}$
22. $x<-1$
23. (a) $x=1,2,3,\cdots,12$

    (b) $x=1,2,3,\cdots,10$
24. $a<1$
25. 3
26. -1
27. 有；$\{x\mid x<0\}$

随堂练习 6 (第 208 页)

(a) $x\ge 9$ (b) $x<1$

练习 14.3 （第 209 页）

1. 无解
2. 无解
3. $x \geq \frac{5}{3}$
4. 无解
5. $-1 < x < 2$
6. $\frac{14}{3} \leq x < 7$
7. $4 < x < 6$
8. $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$
9. $x < -\frac{18}{7}$
10. $x \geq \frac{3}{2}$
11. $\frac{5}{2} < x \leq 4$
12. 无解
13. $2 < x < \frac{14}{5}$
14. $\frac{67}{11} < x < 11$
15. $-2 \leq x \leq 6$
16. $1 < x \leq 2$

随堂练习 7 （第 211 页）

每分钟 40 公尺

练习 14.4 （第 211 页）

1. 86 分
2. 2
3. 6
4. $x > 3\frac{1}{2}$
5. 8
6. 介于 0 cm 与 30 cm 之间
7. RM 50
8. 七点十分

总复习题 14 （第 212 页）

1. $x > -6$
2. $x \geq 3$
3. $x > -3$
4. $x < \frac{9}{2}$
5. $x \geq 4$
6. $x > \frac{1}{2}$
7. $y \leq -31$
8. $x < \frac{1}{5}$
9. 无解
10. $\boldsymbol{R}$
11. (a) 3 (b) -2
12. (a) $15\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 15 (d) 1
13. (a) 14 (b) 3 (c) $2\frac{1}{2}$ (d) 6
14. $x > 5$
15. $x > 1$
16. $-7 < x < \frac{2}{3}$
17. 无解
18. $x > 2$
19. $-5 < x < 1$
20. $x \geq 1$
21. $x \geq 12$
22. 1334 本
23. 95 分
24. (a) 16 (b) -49
25. (a) $-\frac{1}{4}$ (b) -7
26. 不正确